

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» (ПГУ)
СРЕДНЕВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

**Математическое и компьютерное моделирование
естественно-научных и социальных проблем**

*Материалы
XV Международной научно-технической конференции
молодых специалистов, аспирантов и студентов*

Россия, г. Пенза, 1–4 июня 2021 г.

П о д р е д а к ц и е й
доктора физико-математических наук,
профессора И. В. Бойкова

**Mathematical and Computer Modelling
of Natural Science and Social Problems (MCM-2021)**

*Proceedings of the Fifteenth International
Conference MCM-2021*

Penza, Russian Federation, 1–4 June, 2021

E d i t e d b y
Ilya V. Boykov

Пенза • Издательство ПГУ • 2021

УДК 51
ББК 22.1
М64

Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : материалы XV Международ. науч.-техн. конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов (Россия, г. Пенза, 1–4 июня 2021 г.) / под ред. д.ф.-м.н., проф. И. В. Бойкова. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2021. – 250 с.

ISBN 978-5-907456-63-1

Отражены основные результаты работы XV Международной научно-технической конференции, охватывающие следующие направления научных исследований: уравнения математической физики; теория приближения и кубатурные формулы; численные методы; математические модели экономики, экологии, биологии; математические модели в физике, нанотехнике и нанобиологии; нейроматематика и нейрокомпьютеры.

Издание предназначено для обучающихся по направлению подготовки «Прикладная математика» и специалистов в области вычислительной математики и математического моделирования.

УДК 51
ББК 22.1

О р г а н и з а ц и о н н ы й к о м и т е т

И. В. Бойков, д.ф.-м.н., профессор (Пенза, Россия) – *председатель*;
В. И. Паньженский, к.ф.-м.н., профессор (Пенза, Россия) – *заместитель председателя*; **Д. В. Артамонов**, д.т.н., профессор (Пенза, Россия);
В. И. Горбаченко, д.т.н., профессор (Пенза, Россия); **В. К. Задирака**, д.ф.-м.н., профессор, академик НАН Украины (Киев, Украина); **В. П. Ильин**, д.ф.-м.н., профессор (Новосибирск, Россия); **В. Д. Кревчик**, д.ф.-м.н., профессор (Пенза, Россия); **П. П. Макарычев**, д.т.н., профессор (Пенза, Россия); **В. В. Маркин**, д.социол.н., профессор (Москва, Россия);
П. С. Мартышко, д.ф.-м.н., профессор, член-корреспондент РАН (Екатеринбург, Россия); **М. В. Носков**, д.ф.-м.н., профессор (Красноярск, Россия); **В. И. Половинкин**, д.ф.-м.н., профессор (С.-Петербург, Россия); **Д. Г. Саникидзе**, д.ф.-м.н., профессор (Тбилиси, Грузия); **В. С. Сизиков**, д.т.н., профессор (С.-Петербург, Россия); **Д. Н. Сидоров**, д.ф.-м.н., профессор (Иркутск, Россия); **Ю. Г. Смирнов**, д.ф.-м.н., профессор (Пенза, Россия);
Л. А. Сухарев, к.ф.-м.н., доцент (Саранск, Россия); **С. Фаудаоглы**, д.ф.-м.н., профессор (Измир, Турция); **Л. Р. Фионова**, д.т.н., профессор (Пенза, Россия); **М. А. Щербаков**, д.т.н., профессор (Пенза, Россия)

О т в е т с т в е н н ы й с е к р е т а р ь к о н ф е р е н ц и и

Л. А. Купряшина, к.пед.н., доцент (Пенза, Россия)

Приказ о проведении XV Международной научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов «Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем» (МКМ-2021) № 158/о от 03.03.2021

ISBN 978-5-907456-63-1

© Пензенский государственный университет, 2021

1. УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

УДК 517.927.2

Расчет комплексных ТЕ-поляризованных волн метаматериального слоя

Олег Сергеевич Скворцов¹,
Олег Владимирович Кондырев², Максим Олегович Снегур³

^{1,2,3}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
¹ghj.ghh.13@mail.ru, ²kow20002204@mail.ru, ³snegur.max15@gmail.com

Аннотация. Рассматривается задача распространения ТЕ-поляризованных электромагнитных волн в метаматериальном слое. Проведена классификация волн, существующих в исследуемой структуре. Предложен численный метод расчета постоянных распространения таких волн. Произведен ряд численных экспериментов с слоем, заполненным метаматериалом.

Ключевые слова: диэлектрическая проницаемость, постоянная распространения, комплексная волна, численный метод, уравнение Максвелла

Финансирование: исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-31-70010.

Calculation of complex TE-polarized waves of the metamaterial layer

Oleg S. Skvortsov¹, Oleg V. Kondyrev², Maksim O. Snegur³

^{1,2,3}Penza State University, Penza, Russia
¹ghj.ghh.13@mail.ru, ²kow20002204@mail.ru, ³snegur.max15@gmail.com

Abstract. The problem of the propagation of TE-polarized electromagnetic waves in the metamaterial layer is studied. The classification of waves existing in the structure under study is carried out. The article proposes a numerical method for calculating the propagation constants of such waves. A number of numerical experiments were performed with a layer filled with metamaterial.

Keywords: the dielectric constant, distribution constant, complex wave, numerical method, Maxwell's equations

Acknowledgments: the reported study was funded by RFBR according to the research project № 20-31-70010.

1. Постановка задачи

Рассмотрим трехмерное пространство \mathbb{R}^3 , с декартовой системой координат $Oxyz$ и заполненное изотропной средой без источников, имеющей диэлектрическую проницаемость $\varepsilon_c \varepsilon_0 \equiv const$ и магнитную

проницаемость $\mu_0 \equiv const$, где ϵ_0 и μ_0 – диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума. Мы рассматриваем электромагнитные волны, распространяющиеся через слой

$$\Sigma := \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq h\}.$$

Границы $x = h$ и $x = 0$ – это проекции диэлектрической поверхности.

Мы предполагаем, что поля гармонически зависят от времени как $e^{-i\omega t}$, где $\omega > 0$ – круговая частота.

Определение ТЕ-поляризованных волн сводится к нахождению нетривиальных решений системы уравнений Максвелла зависящих от координаты z , вдоль которой структура регулярна, в виде $e^{i\gamma z}$

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = -i\omega\epsilon_0 \tilde{\epsilon} \mathbf{E}, \\ \nabla \times \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H}, \end{cases} \quad (1)$$

$$\mathbf{E} = (0, E_y(x)e^{i\gamma z}, 0), \quad \mathbf{H} = (H_x(x)e^{i\gamma z}, 0, H_z(x)e^{i\gamma z}), \quad (2)$$

с условиями непрерывности тангенциальных составляющих электрического и магнитного поля на поверхностях разрыва диэлектрической проницаемости ($x = h$ и $x = 0$)

$$\left[E_y \right]_{x=0} = 0, \quad \left[H_z \right]_{x=0} = 0, \quad \left[E_y \right]_{x=h} = 0, \quad \left[H_z \right]_{x=h} = 0, \quad (3)$$

где $\left[f \right]_{x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$. Мы не будем фиксировать условие излучения на бесконечности, потому что мы хотим рассмотреть проблему для произвольных γ .

Считаем, что относительная диэлектрическая проницаемость во всем пространстве имеет вид

$$\begin{cases} \epsilon_c, & x < 0, \\ \epsilon(x) + i\xi_i, & 0 \leq x \leq h, \\ \epsilon_c, & x > h. \end{cases} \quad (4)$$

Мы также предполагаем, что $|\operatorname{Re}(\epsilon(x))| > \epsilon_c$ является непрерывной функцией на отрезке $[0, h]$, $\xi_i \equiv const$.

Задача о ТЕ-поляризованных волнах представляет собой задачу на собственные значения для уравнений Максвелла со спектральным параметром, который является постоянной распространения волноводной структуры.

Поле нормальной волны в волноводе можно представить с помощью одной скалярной функции

$$u := E_y(x). \quad (5)$$

Таким образом, задача сводится к нахождению тангенциальной составляющей электрического поля u .

Мы имеем следующую задачу на собственные значения для касательной компоненты электрического поля u : найти $\gamma \in \mathbb{C}$ такие, что существуют нетривиальные решения дифференциального уравнения

$$u'' + (\omega^2 \mu_0 \tilde{\epsilon} - \gamma^2)u = 0, \quad (6)$$

удовлетворяющие условиям сопряжения

$$\begin{cases} [u]_{x=0} = 0, & [u']_{x=0} = 0, \\ [u]_{x=h} = 0, & [u']_{x=h} = 0. \end{cases} \quad (7)$$

При $x < 0$ или $x > h$, мы имеем $\tilde{\epsilon} = \epsilon_c$; то из (6) получаем уравнение

$$u'' - \lambda^2 u = 0. \quad (8)$$

Выберем решение этого уравнения в виде системы

$$\begin{cases} u(x, \lambda) = e^{\lambda x}, & x < 0, \\ u(x, \lambda) = e^{(h-x)\lambda}, & x < h, \end{cases} \quad (9)$$

где $\lambda^2 = \gamma^2 - \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_c$ и λ – новый (комплексный) спектральный параметр. Если $\text{Re} \lambda > 0$ мы имеем поверхностную волну. Если $\text{Re} \lambda < 0$ мы имеем вытекающую волну.

При $0 < x < h$, мы имеем $\tilde{\epsilon} = \epsilon(x) + i\xi_i$, тогда из (6) получаем уравнение

$$u'' + (\epsilon - \lambda^2)u = 0, \quad (10)$$

где

$$\epsilon(x, \omega) = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 (\epsilon(x) + i\xi_i - \epsilon_c). \quad (11)$$

Определение. $\lambda \in \mathbb{C}$ называется характеристическим числом задачи, если существует нетривиальное решение u уравнения (10) при $0 < x < h$, удовлетворяющее (9) при $x = 0$ и $x = h$ и условиям сопряжения (7).

2. Численный метод

Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$u'' + (\epsilon - \lambda^2)u = 0 \quad (12)$$

с начальными условиями

$$u(0) := A, \quad u'(0) := -\lambda A. \quad (13)$$

Мы предполагаем, что решение задачи Коши (12), (13) существует, единственно, глобально определено на отрезке $[0, h]$ при заданных значениях $0, h$, и непрерывно зависит от параметра λ . Из условия сопряжения на второй границе h (8) получаем дисперсионное уравнение

$$\Delta(\lambda) \equiv \lambda u(h) + u'(h) = 0. \quad (14)$$

Из формулы (14) ясно, что значение $\Delta(\lambda)$ выражается через значения решения задачи Коши.

Пусть $\lambda = \alpha + i\beta$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда взяв вещественную и мнимую части от выражения (14), получим систему действительных уравнений для определения вещественной и мнимой частей комплексной частоты λ :

$$\begin{cases} \Delta_1(\alpha, \beta) := \operatorname{Re} \Delta(\lambda) = 0, \\ \Delta_2(\alpha, \beta) := \operatorname{Im} \Delta(\lambda) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Чтобы определить пару (α, β) , мы будем численно решать систему уравнений (15). Решением каждого уравнения в (15) является кривая в плоскости $O\alpha\beta$. Помещая обе кривые на одной плоскости, мы определим точки пересечения кривых; эти точки являются решением исходной задачи.

3. Численные результаты

На рисунках ниже представлены результаты расчета постоянных распространения для задачи распространения ТЕ-поляризованных волн в слое, заполненном метаматериалом.

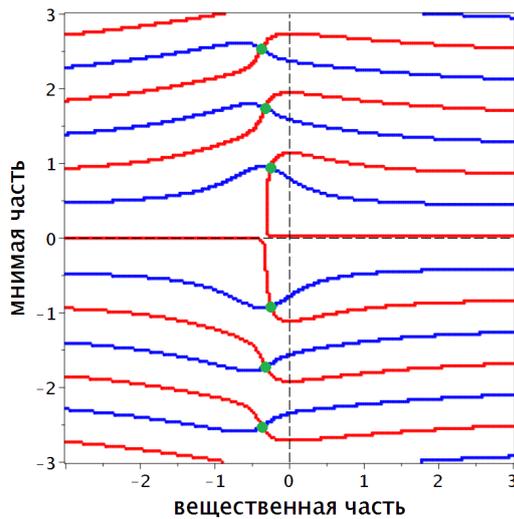


Рис. 2. Значения параметров: $h = 4$, $\epsilon = -4 + x + 0.01\omega i$, $A = 4$, $\omega = 0.1$

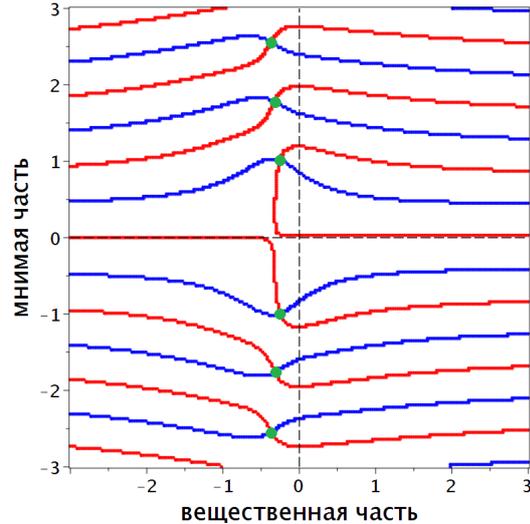


Рис. 3. Значения параметров: $h = 4$, $\epsilon = -4 + x + 0.01\omega i$, $A = 4$, $\omega = 0.5$

Расчеты произведены на разных частотах. Красная кривая – решение первого уравнения системы (15), синяя кривая – решение второго уравнения системы (15).

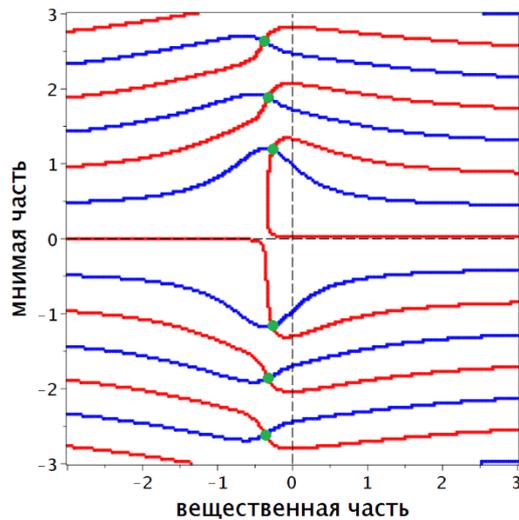


Рис. 4. Значения параметров: $h = 4$,
 $\epsilon = -4 + x + 0.01\omega i$, $A = 4$, $\omega = 0.7$

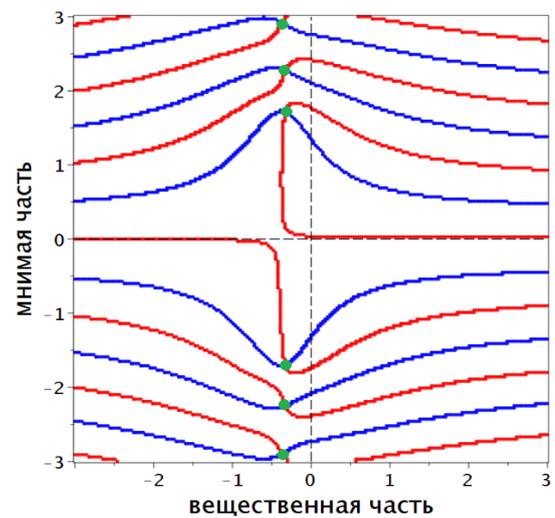


Рис. 5. Значения параметров: $h = 4$,
 $\epsilon = -4 + x + 0.01\omega i$, $A = 4$, $\omega = 1$

Список литературы

1. Адамс М. Введение в теорию оптических волноводов. М. : Мир, 1984.
2. Снайдер А., Лав Дж. Теория оптических волноводов. М. : Радио и связь, 1987.
3. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М. : Радио и связь, 1988.
4. Маркузе Д. Оптические волноводы. М. : Мир, 1974.

**Математические модели нелинейных микроволновых
и оптоэлектронных устройств, функционирующих
на основе включений с высокой степенью нелинейности**

Галина Степановна Макеева

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
rtech@pnzgu.ru

Аннотация. Разработан декомпозиционный подход с использованием автономных блоков, частично заполненных нелинейными средами с «сильной» нелинейностью (НАБ), для моделирования нелинейных 3D-устройств, базирующийся на точных и адекватных математических моделях на основе решения нелинейных граничных 3D-задач дифракции. Дескрипторы НАБ, содержащие включения «сильно» нелинейных сред, определяются как система нелинейных уравнений, связывающих амплитуды падающих и отраженных мод на входных сечениях виртуальных каналов. Реконструкция НАБ в соответствии со схемой декомпозиции 3D-устройств выполняется с использованием итерационного вычислительного процесса.

Ключевые слова: микроволновые 3D-устройства, нелинейные эффекты, комбинационные частоты, падающие, отраженные волны, многомодовая S -матрица

Благодарности: работа начиналась в соавторстве с д.ф.-м.н., профессором О. А. Головановым в части, касающейся создания математической модели и построения вычислительного алгоритма, в рамках гранта РФФИ.

**Mathematical models of nonlinear microwave
and optoelectronic devices operating using inclusions
with a high degree of non-linearity**

Galina S. Makeeva

Penza State University, Penza, Russia
rtech@pnzgu.ru

Abstract. A decomposition approach has been developed using autonomous blocks, partially filled with nonlinear media with "strong" nonlinearity (NAB), for modeling nonlinear 3D-devices, based on accurate and adequate mathematical models based on solving nonlinear boundary 3D diffraction problems. The NAB descriptors containing inclusions of "strongly" nonlinear media are defined as a system of nonlinear equations connecting the amplitudes of the incident and reflected modes at the input sections of virtual channels. Reconstruction of NAB in accordance with the scheme of decomposition of 3D-devices is performed using an iterative computational process.

Keywords: microwave 3D-devices, nonlinear effects, combination frequencies, reflected, incident, waves, multimode S -matrix

Acknowledgments: the work began in collaboration with the doctor of physical and mathematical sciences, professor O.A. Golovanov in the part concerning the creation of a mathematical model and the construction of a computational algorithm, within the framework of a grant from the Russian Foundation for Basic Research.

Введение

Существует растущая потребность в разработке новых микроволновых 3D-устройств, содержащих распределенные включения нелинейных гиромангнитных и полупроводниковых сред, обладающих сильной нелинейностью, для приложений в устройствах с высокой мощностью и нелинейной аналоговой обработки сигналов, работающих в радиолокационном обнаружении, связи и измерительных приборах.

Исследование сильных нелинейных эффектов: умножения частоты, автоколебаний, параметрического усиления и возбуждения, солитонов, неустойчивости электромагнитных магнитостатических и спиновых волн в 3D системах из магнитных нанозаполнителей произвольной формы важно для разработки умножителей частоты, ограничителей, шумов, режекторных фильтров, частотно-селективных систем для микроволновых и магнитофотонных приложений, решеток наносенсоров и Тбайт устройств хранения информации [1].

Успешно продемонстрировано множество сильных нелинейных эффектов в графене в терагерцовом (ТГц), инфракрасном (ИК) и оптическом диапазонах частот, включая насыщаемое поглощение и нелинейное преломление, процессы генерации высших гармоник и смешения волн, оптическое ограничение, преобразование частоты и т.д. Умножение частоты вызывает растущий интерес в связи с возможными применениями для оптического переключения, генерации оптических сигналов и преобразования гармонических частот в сверхбыстродействующих лазерах и оптических датчиках [2]. Эти фотонные устройства в настоящее время находятся в процессе ранней стадии разработки.

Разработка и производство микроволновых и фотонных нелинейных 3D устройств с сильной нелинейностью зависят от развития систем автоматизированного проектирования (САПР), основанных на точных и адекватных математических моделях на основе строгого решения уравнений Максвелла. Исследование и прогнозирование сильно нелинейных физических явлений и взаимодействий в этих устройствах требует развития новых подходов к математическому моделированию.

Строгое электродинамическое моделирование нелинейных микроволновых и фотонных устройств на основе строгого решения нелинейных уравнений Максвелла возможно только с использованием декомпозиционного подхода [3], поскольку сложная форма и различающиеся размеры могут вызывать вычислительные проблемы.

В настоящее время для решения линейных задач электродинамики используется декомпозиционный подход, заключающийся в разделении (декомпозиции) 3D устройств на независимо анализируемые малые объ-

емы или автономные блоки (АБ) с последующей рекомпозицией дескрипторов АБ [3-6]. Дескрипторы известных АБ, заполненных линейными однородными средами (многомодовые АБ [4], минимальные АБ [5], АБ с каналами Флоке [6]), в виде многоканальных многомодовых матриц рассеяния (или проводимости, сопротивления) рассчитывались на основе решения уравнений Максвелла, дополненных упрощенными уравнениями движения в материальной среде заполнения АБ. Однако эти дескрипторы АБ (S-, Y-, Z-матрицы) могут использоваться только в случае АБ, заполненных средами со слабой степенью нелинейности.

Обычно для разработки микроволновых и фотонных устройств используются коммерчески доступные пакеты прикладных программ на основе численных методов FEM и FDTD. Эти пакеты соответствуют уровню технологий сегодняшнего дня, но не включают глубокие физические процессы (в том числе сильные нелинейности), на которых будут основаны нелинейные микроволновые и фотонные устройства ближайшего будущего. Некоторые соответствующие исследования можно найти в [7-9].

В наших предыдущих работах проводилось численное моделирование линейных или нелинейных взаимодействий электромагнитных волн с магнитными [10-13] и полупроводниковыми [14] включениями в волноводах на СВЧ и с графеновыми наноструктурами [15,16] на ТГц частотах на основе решения уравнений Максвелла, дополненных упрощенными уравнениями движения в материальной среде, заполняющей АБ.

Целью данной работы является разработка методики математического моделирования, основанной на решении нелинейных граничных задач, и надежного инженерного метода для численного расчета микроволновых и фотонных нелинейных 3D-устройств с сильными нелинейностями, применимых в САПР. Разработан декомпозиционный подход с использованием АБ, частично заполненных нелинейными средами с «сильной» нелинейностью (НАБ), для моделирования нелинейных 3D устройств, базирующийся на точных и адекватных математических моделях на основе решения нелинейных граничных 3D задач дифракции. Дескрипторы НАБ, содержащие включения «сильно» нелинейных сред, определяются как система нелинейных уравнений, связывающих амплитуды падающих и отраженных мод на входных сечениях виртуальных каналов. Рекомпозиция НАБ в соответствии со схемой декомпозиции 3D-устройств выполняется с использованием итерационного вычислительного процесса.

1. Сведение нестационарных нелинейных уравнений Максвелла к стационарным нелинейным уравнениям

Нестационарные нелинейные уравнения Максвелла имеют следующий вид

$$\operatorname{rot} \vec{H}(t) = \frac{\partial \vec{D}(\vec{E}(t))}{\partial t} + \vec{J}(\vec{E}(t)), \operatorname{rot} \vec{E}(t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{H}(t))}{\partial t}, \quad (1)$$

где $\vec{E}(t) = \vec{E}(x, y, z, t)$, $\vec{H}(t) = \vec{H}(x, y, z, t)$ – напряженности электрического и магнитного полей; $\vec{D}(\vec{E}(t))$ – электрическая индукция, зависящая от напряженности электрического поля; $\vec{B}(\vec{H}(t))$ – магнитная индукция, зависящая от напряженности магнитного поля; $\vec{J}(\vec{E}(t))$ – плотность тока, зависящего от напряженности электрического поля.

Величины $\vec{D}(\vec{E}(t))$, $\vec{B}(\vec{H}(t))$, $\vec{J}(\vec{E}(t))$ в (1) являются векторными функциями от векторных аргументов. Рассмотрим важный для практики случай нелинейной изотропной среды, для которой зависимости $\vec{D}(\vec{E}(t))$, $\vec{B}(\vec{H}(t))$, $\vec{J}(\vec{E}(t))$ определяются следующими выражениями

$$\vec{D}(t) = \varepsilon_0 \varepsilon(|\vec{E}(t)|) \vec{E}(t), \quad \vec{B}(t) = \mu_0 \mu(|\vec{H}(t)|) \vec{H}(t), \quad \vec{J}(t) = \sigma(|\vec{E}(t)|) \vec{E}(t), \quad (2)$$

где $\varepsilon(|\vec{E}(t)|)$, $\mu(|\vec{H}(t)|)$ – относительные нелинейные диэлектрическая и магнитная проницаемости; $\sigma(|\vec{E}(t)|)$ – нелинейная электропроводность; ε_0 , μ_0 – абсолютные электрическая и магнитная постоянные; $|\vec{E}(t)|$, $|\vec{H}(t)|$ – модули векторов $\vec{E}(t)$, $\vec{H}(t)$.

Зависимости $\varepsilon(|\vec{E}(t)|)$, $\mu(|\vec{H}(t)|)$, $\sigma(|\vec{E}(t)|)$ обычно определяются из эксперимента и аппроксимируются многочленами

$$\begin{aligned} \varepsilon(|\vec{E}(t)|) &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 |\vec{E}(t)| + \varepsilon_3 |\vec{E}(t)|^2 + \dots + \varepsilon_n |\vec{E}(t)|^{n-1}, \\ \mu(|\vec{H}(t)|) &= \mu_1 + \mu_2 |\vec{H}(t)| + \mu_3 |\vec{H}(t)|^2 + \dots + \mu_n |\vec{H}(t)|^{n-1}, \\ \sigma(|\vec{E}(t)|) &= \sigma_1 + \sigma_2 |\vec{E}(t)| + \sigma_3 |\vec{E}(t)|^2 + \dots + \sigma_n |\vec{E}(t)|^{n-1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Представим $\vec{E}(t)$, $\vec{H}(t)$, $|\vec{E}(t)|$, $|\vec{H}(t)|$ в виде рядов по комбинационным частотам

$$\vec{E}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \vec{E}(\omega_m) \exp(i\omega_m t), \quad \vec{H}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \vec{H}(\omega_m) \exp(i\omega_m t), \quad (4)$$

$$|\vec{E}(t)| = \sum_{m=-\infty}^{\infty} E(\omega_m) \exp(i\omega_m t), \quad |\vec{H}(t)| = \sum_{m=-\infty}^{\infty} H(\omega_m) \exp(i\omega_m t),$$

где индекс m определен на множестве индексов $\{m_1, m_2, \dots, m_r\}$ (r – количество гармонических источников поля).

Внося (2), (3) в (1), с учетом (4), получаем следующую систему связанных стационарных нелинейных уравнений Максвелла

$$\begin{aligned}
\text{rot}\bar{H}(\omega_m) &= i\omega_m \varepsilon_0 \varepsilon_1(\omega_m) \bar{E}(\omega_m) + \bar{J}(\omega_m), \\
\text{rot}\bar{E}(\omega_m) &= -i\omega_m \mu_0 \mu_1(\omega_m) \bar{H}(\omega_m) + \bar{Z}(\omega_m),
\end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned}
\bar{J}(\omega_m) &= i\omega_m \varepsilon_0 \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{\varepsilon}_2(\omega_m) \bar{E}(\omega_k) E(\omega_n) \gamma_{kn} + \right. \\
&+ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \dot{\varepsilon}_3(\omega_m) \bar{E}(\omega_k) E(\omega_n) E(\omega_j) \gamma_{knj} + \dots + \\
&+ \left. \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{l=-\infty}^{\infty} \dot{\varepsilon}_n(\omega_m) \bar{E}(\omega_k) E(\omega_n) E(\omega_j) \dots E(\omega_l) \gamma_{knj\dots l} \right), \\
\bar{Z}(\omega_m) &= i\omega_m \mu_0 \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu_2(\omega_m) \bar{H}(\omega_k) H(\omega_n) \gamma_{kn} + \right. \\
&+ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mu_3(\omega_m) \bar{H}(\omega_k) H(\omega_n) H(\omega_j) \gamma_{knj} + \dots + \\
&+ \left. \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{l=-\infty}^{\infty} \mu_n(\omega_m) \bar{H}(\omega_k) H(\omega_n) H(\omega_j) \dots H(\omega_l) \gamma_{knj\dots l} \right),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_k(\omega_m) &= \varepsilon_k(\omega_m) - i \frac{\sigma_k(\omega_m)}{\varepsilon_0 \omega_m}, \quad k=1,2,\dots,n; \\
\gamma_{knj\dots l} &= \begin{cases} 0, & \text{если } \omega_k + \omega_n + \omega_j + \dots + \omega_l \neq \omega_m, \\ 1, & \text{если } \omega_k + \omega_n + \omega_j + \dots + \omega_l = \omega_m. \end{cases}
\end{aligned}$$

2. Нелинейный автономный блок с виртуальными каналами Флоке

Нелинейный автономный блок (волноводный трансформатор (ВТ) [3]) представляет собой прямоугольный параллелепипед с однородной нелинейной средой и виртуальными волноводами (каналами Флоке), присоединенными к граням параллелепипеда (рис. 1).

Для НАБ связь между амплитудами $c_{n(\beta)}^+(\omega_l)$ падающих волн и амплитудами $c_{k(\alpha)}^-(\omega_m)$ отраженных волн устанавливается через систему нелинейных уравнений

$$c_{k(\alpha)}^-(\omega_m) = F_{k(\alpha)}(\omega_m; c^+), \quad \alpha=1,2,\dots,6, \quad k=1,2,\dots,N_\alpha, \quad m=\pm 1,2,\dots,\pm M, \tag{6}$$

где N_α – количество учтенных нормальных волн в α -ом виртуальном канале, M – количество учтенных комбинационных частот. Координатами точки c^+ являются коэффициенты $c_{n(\beta)}^+(\omega_l)$, $\beta = 1, 2, \dots, 6$, $n = 1, 2, \dots, N_\beta$. Заметим, что подобная связь между амплитудами $c_{n(\beta)}^+(\omega_l)$ и $c_{k(\alpha)}^-(\omega_m)$ для ВТ с линейными средами осуществляется через **S**-матрицы.

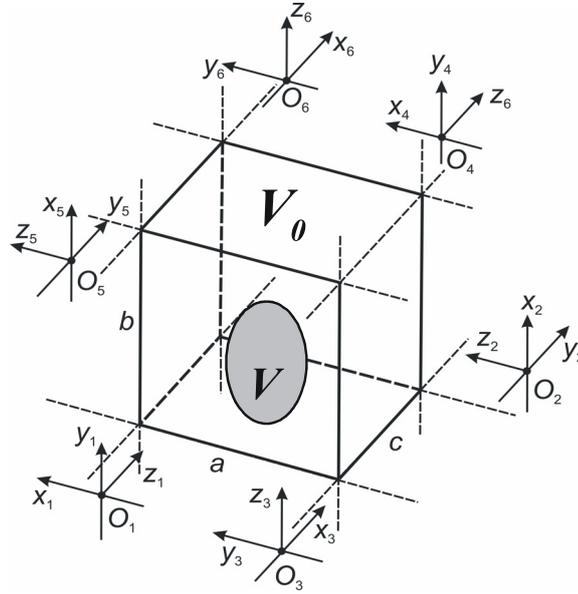


Рис. 1

Нелинейные функции $F_{k(\alpha)}(\omega_m; c^+)$ полностью описывают электродинамический режим работы НАБ, поэтому могут быть использованы в качестве его дескриптора. Основой построения вычислительного алгоритма является простая итерация [17]. Для нахождения дескриптора $F_{k(\alpha)}(\omega_m; c^+)$ необходимо на каждой итерации решать уравнения Максвелла (5) при краевых условиях неасимптотического излучения на гранях параллелепипеда [18]

$$\int_{S_\alpha} (\vec{E}(\omega_m) \times \vec{h}_{k(\alpha)}(\omega_m) + \vec{e}_{k(\alpha)}(\omega_m) \times \vec{H}(\omega_m)) d\vec{s}_\alpha = 2c_{k(\alpha)}^+(\omega_m) R_{k(\alpha)}(\omega_m), \quad (7)$$

где $\vec{e}_{k(\alpha)}(\omega_m)$, $\vec{h}_{k(\alpha)}(\omega_m)$ – поперечные компоненты (электрическая и магнитная) нормальных волн в каналах Флоке [6], $R_{k(\alpha)}(\omega_m)$ – коэффициент нормировки. Известными величинами в (5), (7) на каждой итерации являются амплитуды $c_{n(\beta)}^+(\omega_m)$ падающих волн в виртуальных каналах АБ и токи $\vec{J}(\omega_m)$, $\vec{Z}(\omega_m)$, локализованные в объеме параллелепи-

педа, неизвестными – амплитуды $c_{k(\alpha)}^-(\omega_m)$ отраженных волн в виртуальных каналах.

Решение линеаризированных уравнений Максвелла (5) с краевыми условиями (7) на каждой итерации будем искать в виде

$$C^- = C_{\Sigma}^- + SC^+, \quad (8)$$

где S – матрица рассеяния АБ в виде прямоугольного параллелепипеда с однородной линейной средой заполнения и виртуальными каналами Флоке (выражения для определения S получены в [6]); C_{Σ}^- – матрица излучения, появление которой связано с наличием возбуждающих токов $\vec{J}(\omega_m)$, $\vec{Z}(\omega_m)$; C^+ , C^- – матрицы, составленные соответственно из амплитуд падающих и отраженных волн $c_{n(\beta)}^+(\omega_m)$ и $c_{k(\alpha)}^-(\omega_m)$.

Используя методику нахождения возбужденных волн, описанную в [20], получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для определения элементов матрицы излучения C_{Σ}^-

$$(I + Y^T)C_{\Sigma}^- = f, \quad (9)$$

где I – единичная матрица, Y^T – транспонированная матрица проводимости АБ с однородной линейной средой заполнения и виртуальными каналами Флоке.

Элементы матрицы f определяются следующим образом

$$f_{k(\alpha)}(\omega_m) = - \int_V (\vec{J}(\omega_m) \cdot \vec{E}_{k(\alpha)}(\omega_m) + \vec{Z}(\omega_m) \cdot \vec{H}_{k(\alpha)}(\omega_m)) dV.$$

Неизвестные амплитуды $c_{k(\alpha)}^-(\omega_m)$ отраженных волн в виртуальных каналах Флоке определены, но этого еще недостаточно. При переходе к следующей итерации необходимо вновь определить токи $\vec{J}(\omega_m)$, $\vec{Z}(\omega_m)$ внутри НАБ, которые вычисляются через поля $\vec{E}(\omega_m)$, $\vec{H}(\omega_m)$ задачи (5), (7).

Решение электродинамической задачи (5), (7) для АБ в виде прямоугольного параллелепипеда с виртуальными каналами Флоке будем искать в виде

$$\vec{E}_q(\omega_m) = \sum_{n=1}^q a_n(\omega_m) \vec{E}_n^M, \quad \vec{H}_q(\omega_m) = \sum_{n=1}^q b_n(\omega_m) \vec{H}_n^{\mathcal{E}}, \quad (10)$$

где \vec{E}_n^M , \vec{H}_n^M – собственные поля прямоугольного резонатора с магнитно закороченными гранями; $\vec{E}_n^{\mathcal{E}}$, $\vec{H}_n^{\mathcal{E}}$ – собственные поля прямоугольно-

го резонатора с электрически закороченными гранями; $a_n(\omega_m)$, $b_n(\omega_m)$ – неизвестные коэффициенты.

Используя проекционную модель [19], получаем следующую СЛАУ для определения коэффициентов $a_n(\omega_m)$, $b_n(\omega_m)$:

$$\begin{cases} A^{aa}a + A^{ab}b = F^a, \\ A^{ba}a + A^{bb}b = F^b, \end{cases} \quad (11)$$

где

$$F^a = f^a - A^{ac}c^-, F^b = f^b - A^{bc}c^-,$$

$$A_{kn}^{aa}(\omega_m, \omega_l) = i\omega_m \varepsilon_0 \varepsilon_1(\omega_m) \delta_{lm} \int_V \vec{E}_n^M \cdot \vec{E}_k^M dV,$$

$$A_{kn}^{ab}(\omega_m, \omega_l) = \delta_{lm} (i\omega_k^M \mu_0 \int_V \vec{H}_n^\partial \cdot \vec{H}_k^M dV - \int_{S_\Sigma} (\vec{H}_n^\partial \times \vec{E}_k^M) \cdot d\vec{s}),$$

$$A_{kj(\beta)}^{ac}(\omega_m, \omega_l) = \delta_{lm} \int_{S_\beta} (\vec{h}_{j(\beta)}(\omega_l) \times \vec{E}_k^M) \cdot d\vec{s},$$

$$A_{kn}^{ba}(\omega_m, \omega_l) = i\omega_k^\partial \varepsilon_0 \delta_{lm} \int_V \vec{E}_n^M \cdot \vec{E}_k^\partial dV,$$

$$A_{kn}^{bb}(\omega_m, \omega_l) = i\omega_m \mu_0 \mu_1(\omega_m) \delta_{lm} \int_V \vec{H}_n^\partial \cdot \vec{H}_k^\partial dV,$$

$$A_{kj(\beta)}^{bc}(\omega_m, \omega_l) = \delta_{lm} \int_{S_\beta} (\vec{e}_{j(\beta)}(\omega_l) \times \vec{H}_k^\partial) \cdot d\vec{s},$$

$$A_{i(\alpha)n}^{ca}(\omega_m, \omega_l) = \delta_{lm} \int_{S_\alpha} (\vec{E}_n^M \times \vec{h}_{i(\alpha)}(\omega_m)) \cdot d\vec{s},$$

$$A_{i(\alpha)n}^{cb}(\omega_m, \omega_l) = \delta_{lm} \int_{S_\alpha} (\vec{e}_{i(\alpha)}(\omega_m) \times \vec{H}_n^\partial) \cdot d\vec{s},$$

$$f_k^\alpha(\omega_m) = \sum_{\alpha=1}^6 \sum_{n=1}^{N_\alpha} c_{n(\alpha)}^+(\omega_m) \int_{S_\alpha} (\vec{h}_{n(\alpha)}(\omega_m) \times \vec{E}_k^M) \cdot d\vec{s} - \int_V \vec{J}(\omega_m) \cdot \vec{E}_k^M dV,$$

$$f_k^b(\omega_m) = - \sum_{\alpha=1}^6 \sum_{n=1}^{N_\alpha} c_{n(\alpha)}^+(\omega_m) \int_{S_\alpha} (\vec{e}_{n(\alpha)}(\omega_m) \times \vec{H}_k^\partial) \cdot d\vec{s} + \int_V \vec{Z}(\omega_m) \cdot \vec{H}_k^\partial dV,$$

$$f_{i(\alpha)}^c(\omega_m) = 2c_{i(\alpha)}^+(\omega_m) R_{i(\alpha)}(\omega_m);$$

S_{Σ} – поверхность граней параллелепипеда; $\omega_k^{\mathcal{E}}, \omega_k^M$ – собственные частоты прямоугольного резонатора соответственно с электрически и магнитно закороченными гранями;

$$\delta_{lm} = \begin{cases} 0, & \text{если } l \neq m \\ 1, & \text{если } l = m \end{cases}.$$

3. Рекомпозиция нелинейных автономных блоков

При рекомпозиции НАБ, а также при рекомпозиции линейных АБ с НАБ необходимо решать системы нелинейных уравнений. Это достаточно сложная и трудно алгоритмизируемая вычислительная процедура. Здесь предложен метод линеаризации рекомпозиции НАБ, который является итерационным. На каждом шаге НАБ в декомпозиционной схеме заменяются на линейные АБ с дескрипторами в виде матриц рассеяния S_H , а затем осуществляется рекомпозиция АБ.

Нелинейные функции $F_{k(\alpha)}(\omega_m; c^+)$ в (6) разложим в окрестности точки c_0^+ в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} c_{k(\alpha)}^-(\omega_m) &= F_{k(\alpha)}(\omega_m; c_0^+) + \\ &+ \sum_{l=1}^M \sum_{\beta=1}^L \sum_{n=1}^{N_{\beta}} \frac{\partial F_{k(\alpha)}(\omega_m; c_0^+)}{\partial c_{n(\beta)}^+(\omega_l)} (c_{n(\beta)}^+(\omega_l) - c_{n(\beta)}^{+0}(\omega_l)) + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

где M – количество учтенных комбинационных частот; L – число виртуальных каналов, N_{β} – количество типов волн, учтенных в β -м виртуальном канале.

Учитывая в ряде Тейлора члены до первых частных производных включительно, заметим нелинейную зависимость между амплитудами падающих $c_{n(\beta)}^+(\omega_m)$ и отраженных $c_{k(\alpha)}^-(\omega_m)$ волн на линейную

$$C^- = C_{\Sigma}^- + S_H C^+, \quad (13)$$

где $C_{\Sigma}^- = C_0^- - S_H C_0^+$.

Матрицы C_0^+, C_0^-, C^+, C^- составлены соответственно из элементов $\{c_{n(\beta)}^{+0}(\omega_l)\}, \{F_{k(\alpha)}(\omega_m; c_0^+)\}, \{c_{n(\beta)}^+(\omega_l)\}, \{c_{k(\alpha)}^-(\omega_m)\}$. Матрица рассеяния S_H скомпонована по комбинационным частотам, входным каналам, типам волн; ее элементы вычисляются

$$S_{kn}^{\alpha\beta}(\omega_m, \omega_l) = \frac{\partial F_{k(\alpha)}(\omega_m; c_0^+)}{\partial c_{n(\beta)}^+(\omega_l)}. \quad (14)$$

Матрица излучения C_{Σ}^{-} состоит из элементов $\{c_{\Sigma k(\alpha)}^{-}(\omega_m)\}$ и скомпонована также как и матрицы C^{-} , C_o^{-} .

Линейные АБ включаются в декомпозиционную схему через фиктивные блоки V , W , которые имеют матрицы рассеяния:

$$S_V = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ I & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, S_W = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где I – единичная матрица, $\mathbf{0}$ – нулевая матрица. С помощью АБ V осуществляется включение в декомпозиционную схему матрицы излучения C_{Σ}^{-} , через блоки W – доступ к амплитудам падающих $c_{n(\beta)}^{+}(\omega_m)$ и отраженных $c_{k(\alpha)}^{-}(\omega_m)$ волн в виртуальных каналах НАБ, которые необходимы для организации и контроля сходимости итерационного процесса.

Процесс рекомпозиции НАБ итерационный. Задав начальные приближения для точки c_0^{+} , определяем из (14) элементы матрицы S_H и матрицы C_{Σ}^{-} для всех НАБ, входящих в декомпозиционную схему. Соединяя в декомпозиционной схеме линейные АБ (с дескрипторами в виде \mathbf{S} -матриц) между собой, получаем суммарную \mathbf{S} -матрицу ВТ (устройства СВЧ) на первой итерации. Зная амплитуды падающих волн $c_{n(\beta)}^{+}(\omega_l)$ в каналах ВТ и элементы матрицы C_{Σ}^{+} , определяем через суммарную \mathbf{S} -матрицу ВТ амплитуды отраженных волн $c_{k(\alpha)}^{-}(\omega_m)$ в каналах ВТ и элементы матриц C^{+} , C^{-} в виртуальных каналах (выходы 3, 4 фиктивных блоков W) НАБ.

Проверяем, если элементы матриц C^{+} и C^{-} в виртуальных каналах НАБ удовлетворяют с заданной точностью нелинейным уравнениям (6), то вычислительный процесс заканчивается. Если нет, то переходим к следующей итерации, на которой элементы матрицы S_H и матрицы C_{Σ}^{-} определяются при $C_0^{+} = C^{+}$ (13), (14), и процесс рекомпозиции линейных АБ повторяется. На последней итерации амплитуды отраженных волн $c_{k(\alpha)}^{-}(\omega_m)$ в каналах ВТ являются решением исходной задачи дифракции.

Заключение

Развита методология электродинамического анализа, отличающаяся от известных тем, что основана на строгом решении уравнений Макс-

велла, дополненных уравнениями. движения в нелинейной материальной среде заполнения АБ без упрощения формул. и граничные условия.

В методике используется декомпозиционный подход, поэтому можно моделировать нелинейные 3D-устройства сложной геометрии, быстро переходить от одной краевой задачи к другой, решать численные проблемы, связанные с нестабильностью вычислительных процессов. Поэтому разработанные вычислительные алгоритмы расчета S-матриц НАБ могут быть использованы для электродинамического анализа микроволновых и фотонных нелинейных 3D-устройств, содержащих включения нелинейных сред с «сильной» нелинейностью произвольной формы.

Разработанный подход декомпозиции с использованием НАВ может быть применен для численного моделирования устойчивых во времени и пространственно неоднородных процессов (с большими амплитудами) в нелинейных микроволновых и фотонных 3D-устройствах с учетом затратной геометрии. Для моделирования неустойчивых нелинейных явлений необходим алгоритм на основе НАВ и усовершенствованный вычислительный алгоритм определения точек бифуркации нелинейного оператора Максвелла.

Разработанные адекватные модели, основанные на решении нелинейных уравнений Максвелла (где коэффициенты сильных нелинейностей материальных сред определяются из экспериментов) без каких-либо упрощений уравнений и граничных условий, позволяют отказаться от эмпирического подхода к построению нелинейных микроволновых и фотонных 3D устройств.

Вычислительные алгоритмы решения краевых задач дифракции с использованием численных методов НАВ могут быть включены в программный пакет, который в будущем планируется разработать для математического моделирования и САПР перспективных микроволновых и фотонных 3D-устройств, использующих сильно нелинейные явления.

Список литературы

1. Nikitov S. A., Kalyabin D. V., Lisenkov I. V. [et al.]. Magnonics: a new research area in spintronics and spin wave electronics // UFN. 2015. Vol. 185, № 10. P. 1099–1128.

2. Turchinovich D., Caspani L., Tauke-Pedretti A. [et al.]. Terahertz Nonlinear Optics of Graphene, Probably the Most Nonlinear Material We Know // Adv. Optical Mater. 2020. Vol. 8. P. 1900771.

3. Никольский В. В. Декомпозиционный подход к задачам электродинамики. М. : Наука, 1983. 297 с.

4. Никольский В. В., Голованов О. А. Автономные многомодовые блоки и их применение для исследования полосковой линии // Радиотехника и электроника. 1980. Т. 25, № 3. С. 751.

5. Никольский В. В., Лаврова Т. И. Метод минимальных автономных блоков и его реализация для волноводных задач дифракции // Радиотехника и электроника. 1978. Т. 23, № 2. С. 240.

6. Голованов О. А. Автономные блоки с виртуальными каналами Флоке и их применение для решения прикладных задач электродинамики // Радиотехника и электроника. 2006. Т. 51, № 12. С. 1423–1430.
7. Jin C. Argyropoulos. Nonlinear graphene metasurfaces with advanced electromagnetic functionalities // Proc. SPIE. 10722, Plasmonics: Design, Materials, Fabrication, Characterization, and Applications XVI, 107221R, 2018.
8. Deinert J. C., Iranzo D. A., Pérez R. [et al.] Grating-graphene metamaterial as a platform for terahertz nonlinear photonics // ACS Nano. 2021. Vol. 15, № 1. P. 1145–1154.
9. Cox D., García De Abajo F. J. Nonlinear Graphene Nanoplasmonics // Accounts of Chemical Research. 2019. Vol. 52, № 9. P. 2536–2547.
10. Makeeva G. S., Golovanov O. A., Pardavi-Horvath M. An Efficient Nonlinear Frequency Multiplication Mechanism in Ferrite Loaded Waveguide Structures // IEEE Transaction on Magnetics. 2005. Vol. 41, № 10. P. 3559–3561.
11. Pardavi-Horvath M., Makeeva G. S., Golovanov O. A. Nonlinear Phenomena in Magnetic Nanoparticle Systems at Microwave Frequencies // IEEE Transaction on Magnetics. 2008. Vol. 44, № 11. P. 3067–3070.
12. Pardavi-Horvath M., Makeeva G. S., Golovanov O. A. Electrodynamic Model for Low Loss Microwave Nanocomposite Magnets Using Autonomous Blocks with Floquet Channels // Journal of Applied Physics. 2009. Vol. 105, № 7. P. 07C104–07C104-2.
13. Makeeva G. S., Pardavi-Horvath M., Golovanov O. A. Tuning the Scattering Parameters of Magnetic Nanowire Arrays Near the Antiresonance at Photonic Frequencies // IEEE Transaction on Magnetics. 2009. Vol. 45, № 10. P. 4074–4076.
14. Makeeva G. S., Golovanov O. A., Pardavi-Horvath M. Numerical Simulation of Nonlinear and Parametric Oscillations in a Semiconductor Resonator Structure // J. Electromagnetic Waves and Applications (JEMWA). 2006. Vol. 20, № 11. P. 1516–1520.
15. Makeeva G. S., Golovanov O. A. Numerical Modeling of Reconfigurable THz Devices Based on Graphene Nanostructures Using Autonomous Blocks with Floquet Channels // Proceedings of the 45th European Microwave Conference (EuMC) European Microwave Week 2015 (EuMW2015. Paris, France. 7–10 September 2015). Paris, 2015. P. 1061–1064.
16. Голованов О. А., Makeeva Г. С., Ринкевич А. Б. Взаимодействие электромагнитных волн с периодическими решетками микро- и нанолент графена в терагерцовом диапазоне // Журнал технической физики. 2016. Т. 86, № 2. С. 119–126.
17. Бахвалов Н. С. Численные методы. М. : Наука, 1975.
18. Голованов О. А. Численный алгоритм решения задач дифракции для волноводных устройств СВЧ с нелинейными средами // Радиотехника и электроника. 1990. Т. 35, № 9. С. 1853.
19. Никольский В. В. Проекционные методы в электродинамике : сб. науч.-метод. ст. по прикладной электродинамике. М. : Высш. шк., 1977.
20. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М. : Радио и связь, 1988.

Метод операторных пучков и оператор-функций в задаче о нормальных волнах закрытого регулярного неоднородного диэлектрического волновода произвольного сечения

Дмитрий Алексеевич Ванчугов¹, Максим Олегович Снегур²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹d.van4ugov@inbox.ru, ²snegur.max15@gmail.com

Аннотация. Рассматривается задача о нормальных волнах закрытого регулярного неоднородного диэлектрического волновода произвольного сечения. Для данной задачи используется слабая формулировка. Была изучена задача о спектре оператор-функций и приведены свойства операторов, входящий в оператор функцию.

Ключевые слова: уравнение Максвелла, вариационная формулировка, пространства Соболева

Финансирование: исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-31-70010.

The method of operator pencils and operator-functions in the problem of normal waves of a closed regular inhomogeneous dielectric waveguide of arbitrary cross-section

Dmitriy A. Vanchugov¹, Maksim O. Snegur²

^{1,2} Penza State University, Penza, Russia

¹d.van4ugov@inbox.ru, ²snegur.max15@gmail.com

Abstract. The problem of normal waves of a closed regular inhomogeneous dielectric waveguide of arbitrary cross-section is considered. For the problem under consideration, a weak formulation is used. The problem of the spectrum of operator-functions was studied and the properties of the operators included in the operator function were given.

Keywords: Maxwell equation, variational formulation, Sobolev spaces.

Acknowledgments: the reported study was funded by RFBR according to the research project № 20-31-70010.

1. Постановка задачи

Рассмотрим трехмерное пространство \mathbb{R}^3 с декартовой системой координат $Oxyz$. Будем рассматривать математическую модель регулярной (вдоль оси Oz), экранированной волноведущей структуры, поперечного сечения которой плоскостью $z = const$ образно ограниченной областью Ω с границами Γ_1 и Γ_2 . Границы Γ_1 и Γ_2 – проекции поверхности идеально проводящего, бесконечно тонкого экрана.

Диэлектрическая и магнитная проницаемости имеют вид $\epsilon_0\epsilon(x)$ и $\mu_0\mu(x)$, где $x = (x, y)$. Предполагаем также, что $\epsilon(x)$, $\text{Im}\epsilon(x) = 0$, $\mu(x)$, $\text{Im}\mu(x) = 0$, непрерывно дифференцируемые функции в области Ω т.е. $\epsilon(x), \mu(x) \in C^1(\Omega)$.

Задача о нормальных волнах волноведущей структуры состоит в отыскании нетривиальных решений однородной системы уравнений Максвелла в виде бегущей волны, т.е. с зависимостью $e^{i\gamma z}$ от координаты z , вдоль которой структура регулярна

$$\begin{cases} \text{rot } H = -i\epsilon E, \\ \text{rot } E = i\mu H, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E &= (E_x(x)e_x + E_y(x)e_y + E_z(x)e_z)e^{i\gamma z}, \\ H &= (H_x(x)e_x + H_y(x)e_y + H_z(x)e_z)e^{i\gamma z}, \end{aligned} \quad (2)$$

причем должны быть удовлетворены следующие условия: ограниченность энергии поля в любом конечном объеме волновода,

$$\int_V (\epsilon |E|^2 + \mu |H|^2) dX < \infty; \quad (3)$$

обращение в нуль на поверхности идеального проводника касательных составляющих электрического поля

$$E_\tau|_{\Gamma_1} = 0, E_\tau|_{\Gamma_2} = 0. \quad (4)$$

Здесь $X = (x, y, z)$, $V \subset \Sigma := \{X : x \in \Omega\}$ – любой конечный объем. Система уравнений Максвелла (1) записана в нормированном виде. Осуществлен переход к безразмерным величинам ([1]),

$$\begin{aligned} k_0 x &\rightarrow x, \quad \gamma \rightarrow \frac{\gamma}{k_0}, \\ \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H &\rightarrow H, \quad E \rightarrow E, \end{aligned}$$

где $k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0$ и $\mu_0 \epsilon_0$ – диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума.

Задача о нормальных волнах является задачей на собственные значения для системы уравнений Максвелла относительно спектрального параметра γ – нормированной постоянной распространения (затухания) волноведущей структуры.

Запишем систему уравнений Максвелла (1) в координатном виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H_z}{\partial y} - i\gamma H_y = -i\varepsilon E_x, \\ i\gamma H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = -i\varepsilon E_y, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = -i\varepsilon E_z, \\ \frac{\partial E_z}{\partial y} - i\gamma E_y = i\mu H_x, \\ i\gamma E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = i\mu H_y, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = i\mu H_z, \end{array} \right. \quad (5)$$

и выразим функции E_x, H_x, E_y, H_y через E_z, H_z из 1,2,3,4 и 5-го уравнений последней системы, получаем

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{i}{k^2} \left(\gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} + \mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right), & H_x &= \frac{i}{k^2} \left(\gamma \frac{\partial H_z}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} \right), \\ E_y &= \frac{i}{k^2} \left(\gamma \frac{\partial E_z}{\partial y} - \mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right), & H_y &= \frac{i}{k^2} \left(\gamma \frac{\partial H_z}{\partial y} + \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

где $k^2 = \gamma^2 - \varepsilon\mu$.

Из последних формул следует, что поле нормальной волны в волноводе может быть представлено при помощи двух скалярных функций:

$$\Pi(x, y) := E_z(x, y), \quad \Phi(x, y) := H_z(x, y). \quad (7)$$

Тем самым задача сводится к нахождению функций Π и Φ продольных компонент электрического и магнитного полей.

Для продольных компонент поля Π и Φ имеем следующую задачу на собственные значения: найти такие $\gamma \in \mathbb{C}_1$, при которых существуют нетривиальные решения системы уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}\Pi := \Delta\Pi - k^2\Pi = -\left(\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{1}{k^2} \nabla\varepsilon\mu \right) \nabla\Pi - \frac{\gamma}{\varepsilon k^2} J(\varepsilon\mu, \Phi), \\ \mathcal{L}\Phi := \Delta\Phi - k^2\Phi = -\left(\frac{\nabla\mu}{\mu} + \frac{1}{k^2} \nabla\varepsilon\mu \right) \nabla\Phi - \frac{\gamma}{\mu k^2} J(\varepsilon\mu, \Pi), \end{array} \right. \quad (8)$$

и

$$J(u, v) := \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x};$$

условиям сопряжения на Γ_1 и Γ_2

$$\Pi|_{\Gamma_1} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial n}|_{\Gamma_1} = 0, \Pi|_{\Gamma_2} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial n}|_{\Gamma_2} = 0, \quad (9)$$

условию ограниченности энергии в любом конечном объеме V

$$\int_{\Omega} \left(|\nabla \Pi|^2 + |\nabla \Phi|^2 + |\Pi|^2 + |\Phi|^2 \right) dx < \infty. \quad (10)$$

Здесь n – орт внешней нормали к Ω , τ – касательный орт, причем $x \times y = \tau \times n$.

Зная продольные компоненты поля Π и Φ как решение задачи (8)-(10), можно определить поперечные составляющие по формулам (6). Определенно так поле \mathbf{E}, \mathbf{H} удовлетворяет всем условиям (1)–(3). Эквивалентность перехода к задаче (8)-(10) нарушается лишь при $\gamma^2 = \varepsilon\mu$ в этом случае требуется отдельное рассмотрение системы (1).

2. Вариационное соотношение

Будем искать решения Π и Φ задачи (8)–(10) в пространствах Соболева соответственно $H_0^1(\Omega)$ и $H^1(\Omega)$ со скалярным произведением

$$(f, g)_1 = \int_{\Omega} \left(\nabla f \nabla \bar{g} + f \bar{g} \right) dx, \|f\|_1^2 = (f, f)_1.$$

Дадим другую вариационную формулировку задачи (8)-(10). Умножим уравнение системы (8) соответственно на пробные функции \bar{u} и \bar{v} , считая их пока непрерывно дифференцируемыми в Ω , и применив формулу Грина[2] для области, а так же принимая во внимание (8)-(9), получаем

$$\int_{\Omega} \nabla \Pi \nabla \bar{u} dx + \int_{\Omega} k^2 \Pi \bar{u} dx = \int_{\Omega} \bar{u} \left(\frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} + \frac{1}{k^2} \nabla \varepsilon \mu \right) \nabla \Pi dx + \int_{\Omega} \bar{u} \frac{\gamma}{\varepsilon k^2} J(\varepsilon \mu, \Phi) dx,$$

и

$$\int_{\Omega} \nabla \Phi \nabla \bar{v} dx + \int_{\Omega} k^2 \Phi \bar{v} dx = \int_{\Omega} \bar{v} \left(\frac{\nabla \mu}{\mu} + \frac{1}{k^2} \nabla \varepsilon \mu \right) \nabla \Phi dx - \int_{\Omega} \bar{v} \frac{\gamma}{\varepsilon k^2} J(\varepsilon \mu, \Pi) dx.$$

Складывая последние равенства, получаем вариационное соотношение:

$$\gamma^2 \int_{\Omega} \left(\Pi \bar{u} + \Phi \bar{v} \right) dx + \int_{\Omega} \left(\nabla \Pi \nabla \bar{u} + \nabla \Phi \nabla \bar{v} + \Pi \bar{u} + \Phi \bar{v} \right) dx -$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} (\varepsilon\mu + 1)(\Pi\bar{u} + \Phi\bar{v}) dx - \int_{\Omega} \left(\bar{u} \left(\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{1}{k^2} \nabla\varepsilon\mu \right) \nabla\Pi + \bar{v} \left(\frac{\nabla\mu}{\mu} + \frac{1}{k^2} \nabla\varepsilon\mu \right) \nabla\Phi \right) dx - \\
& - \int_{\Omega} \left(\bar{u} \frac{\gamma}{\varepsilon k^2} J(\varepsilon\mu, \Phi) - \bar{u} \frac{\gamma}{\mu k^2} J(\varepsilon\mu, \Pi) \right) dx.
\end{aligned}$$

Определение. Пару функций

$$\Pi \in H_0^1(\Omega), \Phi \in H^1(\Omega), (\|\Pi\|_1 + \|\Phi\|_1 \neq 0)$$

будем называть собственным вектором задачи (8)-(10), отвечающим характеристическому числу $\gamma_0 \in \mathbb{C}_1$ если при $\gamma = \gamma_0$ выполнено вариационное соотношение (11) для любых $\bar{u} \in H_0^1(\Omega), \bar{v} \in H^1(\Omega)$.

3. Задача о спектре оператор-функций

Пусть $H = H_0^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ – декартово произведение гильбертовых пространств со скалярным произведением и нормой:

$$(u, v) = (u_1, v_1)_1 + (u_2, v_2)_1, \|u\|^2 = \|u_1\|_1^2 + \|u_2\|_1^2; u, v \in H,$$

$$u = (u_1, u_2)^T, v = (v_1, v_2)^T, u_1, v_1 \in H_0^1(\Omega), u_2, v_2 \in H^1(\Omega).$$

Тогда интегралы входящие в (11), можно рассматривать как полуторалинейные формы над полем \mathbb{C} , заданные на H от аргументов $u = (\Pi, \Phi)^T, v = (u, v)^T$.

Эти формы определяют[4] некоторые линейные ограниченные операторы $T: H \rightarrow H$ по формуле

$$t(u, v) = (Tu, v), \forall v \in H, \quad (12)$$

при условии что сами формы ограничены: $|t(u, v)| \leq C \|u\| \|v\|$. Линейность следует из линейности формы по первому аргументу, а непрерывность из оценок

$$\|Tu\|^2 = t(u, Tu) \leq C \|u\| \|Tu\|.$$

Рассмотрим полуторалинейные функционалы и порождаемые ими операторы:

$$k(u, v) := \int_{\Omega} (\Pi\bar{u} + \Phi\bar{v}) dx = (Ku, v), \forall v \in H,$$

$$\tilde{k}(u, v) := \int_{\Omega} (\varepsilon\mu + 1)(\Pi\bar{u} + \Phi\bar{v}) dx = (\tilde{K}u, v), \forall v \in H,$$

$$\begin{aligned}
a(u, v) &= \int_{\Omega} (\nabla \Pi \nabla \bar{u} + \nabla \Phi \nabla \bar{v} + \Pi \bar{u} + \Phi \bar{v}) dx = (Iu, v), \forall v \in H, \\
b_1(u, v) &= \int_{\Omega} \left(\bar{u} \left(\frac{1}{k^2} \nabla \varepsilon \mu \right) \nabla \Pi + \bar{v} \left(\frac{1}{k^2} \nabla \varepsilon \mu \right) \nabla \Phi \right) dx = (B_1(\gamma)u, v), \forall v \in H, \\
b_2(u, v) &= \int_{\Omega} \left(\bar{u} \frac{\gamma}{\varepsilon k^2} J(\varepsilon \mu, \Phi) - \bar{u} \frac{\gamma}{\mu k^2} J(\varepsilon \mu, \Pi) \right) dx = (B_2(\gamma)u, v), \forall v \in H, \\
b_3(u, v) &= \int_{\Omega} \left(\bar{u} \left(\frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} \right) \nabla \Pi + \bar{v} \left(\frac{\nabla \mu}{\mu} \right) \nabla \Phi \right) dx = (B_3u, v), \forall v \in H.
\end{aligned}$$

Вариационную задачу (11) можно записать в операторном виде

$$(N(\gamma)u, v) = 0, \forall v \in H$$

или эквивалентно

$$N(\gamma)u = 0, N(\gamma): H \rightarrow H,$$

$$N(\gamma) := \gamma^2 K + I - \tilde{K} - \operatorname{Re} B_3 - B_1(\gamma) - B_2(\gamma). \quad (13)$$

4. Свойства спектра оператор-функций

Приведем следующие утверждения о свойствах операторов, входящих в $N(\gamma)$ (доказательство в [1,5,6]):

Лемма 1. Операторы K и \tilde{K} компактные. Оператор K положительно определен и для его собственных чисел верна асимптотика: $\lambda_n(K) = O(n^{-1}), n \rightarrow \infty$.

Лемма 2. Операторы $B_1(\gamma)$ и $B_2(\gamma)$ являются компактными. Оператор-функции $B_1(\gamma)$ и $B_2(\gamma)$ являются голоморфными в области $\Lambda := \mathbb{C} \setminus \Lambda_0$ и

$$\Lambda_0 := \left\{ \gamma : \Im \gamma = 0, |\gamma| = \min_{x \in \Omega} \sqrt{\varepsilon(x) \mu(x)} \leq |\gamma| \leq \omega \max_{x \in \Omega} \sqrt{\varepsilon(x) \mu(x)} \right\}.$$

Лемма 3. Существуют $\bar{\gamma} \in \mathbb{R}$ такое, что оператор $N(\bar{\gamma})$ непрерывно обратим, т.е. резольвентное множество $\rho(N) := \left\{ \gamma : \exists N^{-1}(\gamma) : H \rightarrow H \right\}$ оператор функции $N(\bar{\gamma})$ не пусто; $\rho(N) \neq \emptyset$.

Теорема 1. Оператор функция $\tilde{N}(\gamma) : H \rightarrow H$ является ограниченной, голоморфной и фредгольмовой в области Λ .

Теорема 2. Спектр оператор-функции $N(\gamma): H \rightarrow H$ является дискретным в Λ , т.е. имеет конечное число характеристических точек конечной алгебраической кратности в любом компакте $K_0 \subset \Lambda$.

Лемма 4. Спектр оператор-функции $N(\gamma): H \rightarrow H$ симметричен относительно действительной и мнимой оси. Если γ_0 — х.ч. оператор-функции $N(\gamma)$ с собственным вектором $u_1 = (\Pi, \Phi)^T$, то числа $-\gamma_0, \bar{\gamma}_0, -\bar{\gamma}_0$ также будут характеристическими той же кратности для оператор-функции $N(\gamma)$ с собственными векторами $u_2 = (-\Pi, \Phi)^T$, $u_3 = (\bar{\Pi}, \bar{\Phi})^T$, $u_4 = (-\bar{\Pi}, \bar{\Phi})^T$, соответственно.

Список литературы

1. Смирнов Ю. Г. Математические методы исследования задач электродинамики. Пенза : Изд-во ПГУ, 2009.
2. Costabel M. Boundary Integral Operators on Lipschitz Domains: Elementary Results // SIAM Journal Mathematical Analyses. 1988. Vol. 19 (3). P. 613–626.
3. Adams R. A. Sobolev Spaces. New York : Academic Press, 1975.
4. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М. : Мир, 1972.
5. Смирнов Ю. Г., Смолькин Е. Ю. Метод оператор-функций в задаче о нормальных волнах неоднородного волновода // Дифференциальные уравнения. 2018. № 54 (9). С. 1196–1206.
6. Смирнов Ю. Г., Смолькин Е. Ю. Исследование спектра в задаче о нормальных волнах закрытого регулярного неоднородного диэлектрического волновода произвольного сечения // Доклады Академии наук. 2018. Т. 478, № 6. С. 627–630.

Исследование задачи на собственные значения, возникающей в теории распространения нелинейных многочастотных волн

Станислав Вячеславович Тихов

Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия

Tik.stanislav2015@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается нелинейная многопараметрическая задача на собственные значения (СЗ), обозначаемая $P(\alpha)$, возникающая в теории распространения электромагнитных волн. Получено уравнение, обладающее тем свойством, что все его решения являются СЗ задачи $P(\alpha)$ и, наоборот, все СЗ задачи являются решениями данного уравнения. Установлено существование как положительных, так и отрицательных решений задачи $P(\alpha)$.

Ключевые слова: многопараметрическая нелинейная задача на собственные значения, метод возмущений, интегральное характеристическое уравнение

Финансирование: исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-71-10015).

The studying of an eigenvalue problem arising in the nonlinear multifrequency wave propagation theory

Stanislav V. Tikhov

Penza State University, Penza, Russia

Tik.stanislav2015@yandex.ru

Abstract. An nonlinear multiparameter eigenvalue problem denoting as $P(\alpha)$ which arises in the wave propagation theory is under consideration. An equation with the property that each its solution is an eigenvalue of $P(\alpha)$ and all eigenvalues of $P(\alpha)$ are solutions of this equation is obtained. The existence of positive and negative eigenvalues of problem $P(\alpha)$ is proved.

Keywords: multiparameter nonlinear eigenvalue problem, perturbation method, integral characteristic equation

Acknowledgments: this study is supported by the Russian Science Foundation under grant 18-71-10015.

Введение

В работе рассматривается задача $P(\alpha)$, включающая n вещественных параметров λ_i , а также n^2 неотрицательных коэффициентов

α_{ij} , определяющих степень влияния нелинейных эффектов на процесс распространения волн.

Если положить $\alpha_{ij} = 0$ при $i \neq j$, то задача $P(\alpha)$ распадается на n независимых нелинейных однопараметрических задач P_i . Задача P_i рассмотрена в работе [1], где представлено *интегральное характеристическое уравнение* (ИХУ) этой задачи, утверждается эквивалентность данного уравнения и задачи P_i (множества решений ИХУ и задачи совпадают), и, наконец, утверждается существование бесконечного числа как отрицательных, так и положительных собственных значений задачи P_i .

Если положить все $\alpha_{ij} = 0$, то $P(\alpha)$ распадается на n независимых линейных задач P_i^0 . Эти задачи хорошо известны и изучены, см., например, [2]. Вкратце, каждая задача P_i^0 имеет не более чем конечное число положительных и бесконечно много отрицательных собственных значений.

Для нахождения положительных собственных значений задачи $P(\alpha)$ применяется подход, основанный на использовании решений задач P_i .

Постановка задачи $P(\alpha)$

Рассмотрим систему из n дифференциальных уравнений

$$u_i'' = -(a_i - \lambda_i)u_i - (\alpha_{i1}u_1^2 + \dots + \alpha_{in}u_n^2)u_i, \quad (1)$$

где a_i и α_{ij} есть неотрицательные постоянные величины, λ_i – вещественные параметры, $u_i \equiv u_i(x)$ и $x \in \bar{I} = [0, h]$.

Задача $P = P(\alpha)$ заключается в нахождении таких n -мерных упорядоченных наборов $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, что существуют функции $u_1 \equiv u_1(x; \lambda), \dots, u_n \equiv u_n(x; \lambda)$, удовлетворяющие системе уравнений (1) и условиям

$$\begin{aligned} u_i(0; \lambda) = 0, u_i'(0; \lambda) = b_i, \\ u_i(h; \lambda) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Определение 1. Упорядоченный набор $\lambda \in \mathbb{R}^n$, являющийся решением задачи $P(\alpha)$, будем называть векторным собственным значением задачи $P(\alpha)$, а соответствующие ему функции $u_1(x; \lambda), \dots, u_n(x; \lambda)$ – собственными функциями задачи $P(\alpha)$.

Определим множества

$$\mathbf{A} = \prod_{i,j} A_{ij}, \quad \Lambda^\pm = \prod_i \Lambda_i^\pm,$$

где

$$A_{ij} = (0, \alpha_{ij}^*), \quad \Lambda_i^- = (-\infty, a_i), \quad \Lambda_i^+ = (0, \lambda_i^*);$$

здесь $\alpha_{ij}^*, \lambda_i^*$ есть некоторые фиксированные числа, некоторые из них произвольны в то время, как другие будут выбраны ниже специальным образом.

Далее мы рассмотрим отдельно два случая: $\lambda \in \Lambda^+$ и $\lambda \in \Lambda^-$. Под $\lambda \in \Lambda^\pm$ стоит понимать, что $\lambda_i \in \Lambda_i^\pm$.

Задача $P(\alpha)$: случай $\lambda \in \Lambda^+$

Представленная ниже теорема устанавливает глобальную однозначную разрешимость (ГОР) задачи Коши (1), (2) при $\lambda \in \mathbb{R}^n$ при некоторых дополнительных условиях, накладываемых на параметры задачи, а именно мы предполагаем, что $\alpha \in \mathbf{A}$ и $\lambda \in \Lambda^+$. ГОР указанной задачи Коши нам нужна для вывода интегрального характеристического уравнения задачи $P(\alpha)$.

Утверждение 1. Пусть α_{ii}^* и λ_i^* фиксированы, тогда существуют числа $\alpha_{ij}^* > 0$ ($i \neq j$) такие, что для всех $0 < \alpha_{ij} < \alpha_{ij}^*$ задача Коши (1), (2) глобально однозначно разрешима при $x \in \bar{I}$; при этом ее решение $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, где $u_i \equiv u_i(x; \alpha, \lambda)$, непрерывно зависит от $(x; \alpha, \lambda) \in \bar{I} \times \Lambda^+ \times \mathbf{A}$.

Данное утверждение доказывается, используя ГОР задачи Коши для системы уравнений (1) с $\alpha_{ij} = 0$ для всех i, j таких, что $i \neq j$, с начальными условиями (2) и теорему, представленную в [3] теорему 16 на стр. 204.

Ниже мы считаем, что параметры задачи $P(\alpha)$ выбраны так, что выполняется утверждение 1.

Предположим, что каждая функция u_i , являющаяся компонентой решения задачи Коши (1), (2), имеет m_i нулей $x_{i,r} \in I$, где $0 \leq r \leq m_i$. Если $m_i = 0$, то u_i не обращается в нуль на интервале $x \in I$. Ясно, что если $u_i \neq 0$, то $u_i'(x_{i,r}) \neq 0$. Далее мы будем использовать индекс r (вместо r_i), чтобы сократить запись; разумеется, это не означает, что u_i и u_j при $i \neq j$ имеют одинаковое количество нулей.

Введем интервалы $I_{i,r} = (x_{i,r}, x_{i,r+1})$, где $r = \overline{0, m_i}$ и $x_{i,0} = 0$, $x_{i, m_i+1} = h$; если $m_i = 0$, то $I_{i,0} = I$.

Задачу $P(\mathbf{a})$ будем исследовать методом интегральных характеристических уравнений. Как известно, данный подход основывается на том, что с рассматриваемой задачей удастся связать некоторую монотонную функцию.

Для этого введем функции

$$\tau_i = u_i^2, \quad \eta_i = u_i' / u_i.$$

Очевидно, что функция τ_i определена и непрерывна на всем отрезке \bar{I} ; функция η_i определена и непрерывна на интервалах $I_{i,r}$.

Используя τ_i и η_i , систему (1) можно записать в виде

$$\begin{cases} \tau_i' = 2\tau_i\eta_i, \\ \eta_i' = -\left(\eta_i^2 + a_i - \lambda_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}\tau_j\right). \end{cases} \quad (3)$$

Можно доказать, что существуют такие α_{ij}^0 ($i \neq j$), что для всех $0 < \alpha_{ij} < \alpha_{ij}^0$ функции η_i являются монотонно убывающими. Всюду ниже будем считать, что $\alpha_{ij}^* < \alpha_{ij}^0$.

Определим функцию

$$T_i(\lambda; I_{i,r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{s^2 + a_i - \lambda_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}\tau_j(x)},$$

где $\tau_j(x)$ определяются на интервале $x \in I_{i,r}$ используя некоторое биективное отображение $g_{i,r}: \mathbb{R} \rightarrow I_{i,r}: \eta_i \rightarrow x$ (такое отображение непрерывно существует в силу монотонности функции η_i).

Интегрируя уравнения $\eta_i' = -\left(\eta_i^2 + a_i - \lambda_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}\tau_j\right)$, $i = \overline{1, n}$, на

каждом интервале $I_{i,r}$ и используя стандартную процедуру, подробно изложенную, например, в работе [4], получаем систему из n уравнений

$$\sum_{r=0}^{m_i} T_i(\lambda; I_{i,r}) = h, \quad (4)$$

которую назовем *системой ИХУ* задачи $P(\mathbf{a})$.

Теорема 1 (об эквивалентности). Упорядоченный набор $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Lambda^+$ является векторным собственным значением задачи $P(\alpha)$ если и только если существуют целые числа $m_i = \hat{m}_i \geq 0$ такие, что $\lambda = \hat{\lambda}$ является решением ИХУ (4) при $m_i = \hat{m}_i$; более того, каждая собственная функция $u_i \equiv u_i(x; \alpha, \lambda)$ имеет \hat{m}_i (простых) нулей $x_{i,r} \in I$, где $0 \leq r \leq m_i$.

Сформулированная выше теорема позволяет перейти от изучения задачи $P(\alpha)$ к исследованию ИХУ и потому представляет крайне важное значение. Оказывается, что разрешимость задачи $P(\alpha)$ можно установить, используя представленные в [1] результаты, касающиеся разрешимости задачи P_i и свойств ее собственных значений, и тот факт, что при достаточно малых значениях коэффициентов α_{ij} ($i \neq j$) задачи $P(\alpha)$ и P_i становятся в некотором смысле «близкими». Итак, мы готовы сформулировать следующий результат о разрешимости задачи $P(\alpha)$.

Теорема 2 (о разрешимости). Пусть каждая задача P_i имеет m_i простых собственных значений $\hat{\lambda}_{i,1}^+, \dots, \hat{\lambda}_{i,m_i}^+ \in [0, a_i) \cup (\lambda_i', \lambda_i^*) \subset \Lambda_i^+$, соответственно. Тогда существуют положительные постоянные α_{ij}^* ($i \neq j$) такие, что для всех $0 < \alpha_{ij} < \alpha_{ij}^*$ ($i \neq j$) задача $P(\alpha)$ имеет по крайней мере $m_1 \times \dots \times m_n$ векторных собственных значений $\bar{\lambda}_{k_1, \dots, k_n} = (\bar{\lambda}_{i, k_1}^+, \dots, \bar{\lambda}_{i, k_n}^+)$, где $k_i = \overline{1, m_i}$; более того, каждое векторное собственное значение $\bar{\lambda}_{k_1, \dots, k_n}$ лежит в окрестности точки $(\hat{\lambda}_{i, k_1}^+, \dots, \hat{\lambda}_{i, k_n}^+)$.

Задача $P(\alpha)$: случай $\lambda \in \Lambda^-$

Справедливо

Утверждение 2. Пусть $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ и α_{ij}^* есть некоторые положительные числа, тогда задача Коши (1), (2) глобально однозначно разрешима при $x \in \bar{I}$; при этом решение ее $u = (u_1, \dots, u_n)$, где $u_i \equiv u_i(x; \alpha, \lambda)$ непрерывно зависит от $(x; \alpha, \lambda) \in \bar{I} \times \Lambda^- \times \mathbf{A}$.

Также как и в случае $\lambda \in \Lambda^+$, введем в рассмотрение те же функции τ_i и η_i . Можно показать, что функции η_i монотонно убывают.

Система ИХУ задачи $P(\alpha)$ в случае $\lambda \in \Lambda^-$ имеет тот же вид, что и в случае $\lambda \in \Lambda^+$, см. формулу (4); также имеет место результат, аналогичная теореме 1.

Теорема 3. Если $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ для $i, j = \overline{1, n}$, то существуют неотрицательные целые числа m_1', \dots, m_n' такие, что для любого набора чисел $m_1 \geq m_1', \dots, m_n \geq m_n'$ система интегральных характеристических уравнений (4) имеет по крайней мере одно решение $\bar{\lambda}_{m_1, \dots, m_n}$ и, таким образом, задача $P(\mathbf{a})$ имеет бесконечно много векторных собственных значений $\bar{\lambda} \in \Lambda^-$.

Заключение

Итак, в данной работе была рассмотрена многопараметрическая нелинейная задача $P(\mathbf{a})$ на собственные значения. Основным интересом представляют теоремы 2 и 3, устанавливающие разрешимость задачи $P(\mathbf{a})$ и свойства ее решений (собственных значений).

Теорема 2 устанавливает существование лишь конечного числа векторных собственных значений задачи $P(\mathbf{a})$ в области $\lambda \in \Lambda^+$. С одной стороны, ввиду того, что задача P_i , являющаяся частным случаем $P(\mathbf{a})$, имеет бесконечно много положительных собственных значений, то естественно ожидать, что и $P(\mathbf{a})$ также имеет бесконечно много решений в указанной области. С другой стороны, теорема 2 обнаруживает существование собственных значений задачи $P(\mathbf{a})$, которые никак не связаны с решениями линейных задач P_i^0 и, следовательно, не могут быть найдены с помощью классических методов теории возмущений.

Кроме того, полученные результаты демонстрируют эффективность рассмотренного в работе метода нахождения решений некоторого класса нелинейных задач на собственные значения. Разумеется, этот метод применим и для других задач математической физики.

Список литературы

1. Тихов С. В. Исследование одной многопараметрической нелинейной задачи на собственные значения при помощи модифицированного метода возмущений // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : сб. науч. тр. конф. Пенза, 2020. С. 12–17.
2. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М. ; Л. : Гос. Изд-во технико-теоретич. лит., 1956. Т. 1.
3. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. : ГИФМЛ, 1961.
4. Валовик Д. В., Тихов С. В. О существовании бесконечного числа собственных значений в одной нелинейной задаче теории волноводов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2018. Т. 58, № 10. С. 1658–1667.

Математическое моделирование нелинейных параметрических процессов в устройствах терагерцового диапазона на основе графеновых метаматериалов

Галина Степановна Макеева

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
rtech@pnzgu.ru

Аннотация. Построены математические модели нелинейных, параметрических процессов в устройствах терагерцового диапазона на основе графенового метаматериала (многослойной структуры графен-диэлектрик). Модели базируются на решении нелинейных краевых задач дифракции для системы уравнений Максвелла с электродинамическими граничными условиями, где проводимость графена определяется нелинейной зависимостью от напряженности электрического поля, аппроксимируемой многочленом. Построена проекционная модель в интегральной форме для систем нелинейных уравнений Максвелла на комбинационных частотах. Проведено математическое моделирование режимов регенеративного параметрического усиления и параметрической генерации, обусловленной нестабильностью волн.

Ключевые слова: многослойный метаматериал графен-диэлектрик, параметрический, усилитель, генератор, сигнал, волна накачки, регенеративное усиление, нестабильность

Благодарности: работа начиналась в соавторстве с д.ф.-м.н., профессором О. А. Головановым в части, касающейся создания математической модели и построения вычислительного алгоритма, в рамках гранта РФФИ.

Mathematical modeling of nonlinear parametric processes in terahertz devices based on graphene metamaterials

Galina S. Makeeva

Penza State University, Penza, Russia
rtech@pnzgu.ru

Abstract. Mathematical models of nonlinear, parametric processes in terahertz devices based on graphene metamaterial (graphene-dielectric multilayer structure) have been constructed. The models are based on solving nonlinear boundary value problems of diffraction for the system of Maxwell equations with electrodynamic boundary conditions, where the graphene conductivity is determined by a nonlinear dependence on the electric field strength, approximated by a polynomial. An integral projection model is constructed for systems of nonlinear Maxwell equations at combination frequencies. Mathematical modeling of the regimes of regenerative parametric amplification and parametric generation caused by wave instability has been carried out.

Keywords: multilayer graphene-dielectric metamaterial, parametric, amplifier, generator, signal, pump wave, regenerative amplification, instability

Acknowledgments: the work began in collaboration with the doctor of physical and mathematical sciences, professor O.A. Golovanov in the part concerning the creation of a mathematical model and the construction of a computational algorithm, within the framework of a grant from the Russian Foundation for Basic Research.

1. Математическая модель. Постановка задачи дифракции

Расчетная схема параметрических процессов в устройствах терагерцового (ТГц) диапазона на основе графенового метаматериала (многослойной структуры графен-диэлектрик) показана на рис. 1. Параметрическое ТГц устройство (параметрический усилитель, генератор) рассматриваем как волноводный трансформатор (ВТ) [1] с каналами Флоке на входных сечениях S_1, S_2, S_3, S_4 (рис. 1). Основная область ВТ V_0 содержит графеновый метаматериал (листы графена и диэлектрические слои SiO_2).

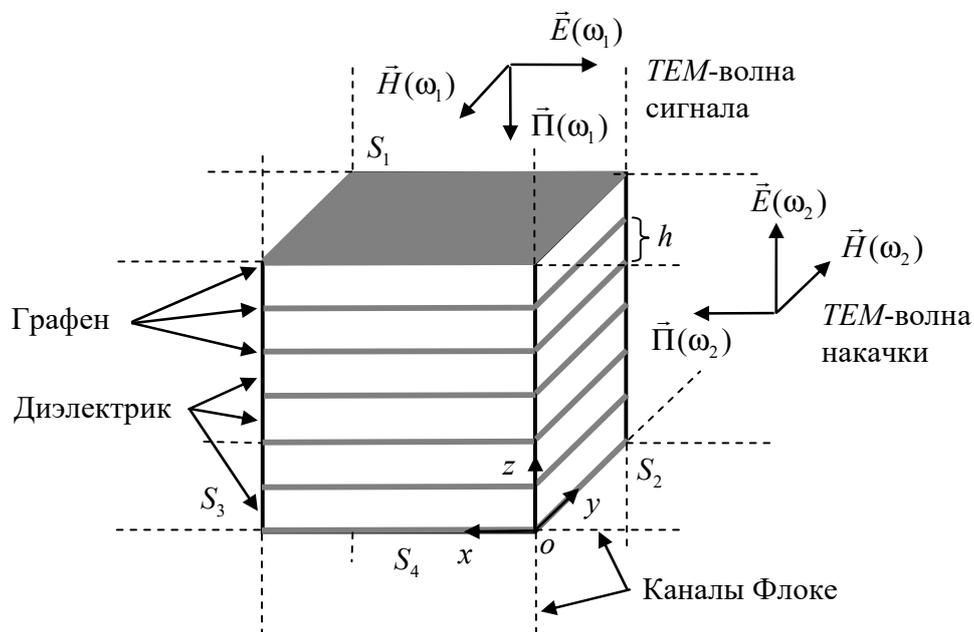


Рис. 1. Расчетная схема нелинейного параметрического устройства (параметрического усилителя и генератора) ТГц диапазона, представленного в виде волноводного трансформатора, содержащего графеновый метаматериал (многослойную структуру графен-диэлектрик) в основной области V_0 и каналы Флоке на входных сечениях

S_1, S_2, S_3, S_4 : $\vec{P}(\omega_1)$, $\vec{P}(\omega_2)$ – векторы Пойнтинга

Пусть на входное сечение S_2 ВТ падает ТЕМ-волна накачки с частотой ω_2 , на входное сечение S_1 - ТЕМ-волна сигнала с частотой ω_1 . Вектор электрического поля $E_z(\omega_2)$ ТЕМ-волны накачки, как и вектор внешнего постоянного электрического поля $E_0 = E_0 z_0$ направлены перпендикулярно листам графена (рис. 1).

Электрическое поле ТЕМ-волны накачки $E_z(t) = E_{zm} \cos \omega_2 t$ (сигнал большой амплитуды) действует как переменное во времени поле смещения, изменяя химический потенциал μ_c графена, следовательно, и поверхностную проводимость σ_s графена. Как следует из формулы Кубо [2], поверхностная проводимость графена $\sigma_s(\mu_c(E_z))$ является нелинейной функцией химического потенциала μ_c , а значит и электрического поля $E_{z0} + E_z(t) = E_{z0} + E_{zm} \cos \omega_2 t$.

Нелинейную зависимость $\sigma_s(\mu_c(E_{z0} + E_z(t)))$ аппроксимируем четным многочленом 6-ой степени:

$$\sigma_s(\mu_c(E_{z0} + E_z(t))) = \sigma_0 + \sigma_2(E_{z0} + E_z(t))^2 + \sigma_4(E_{z0} + E_z(t))^4 + \sigma_6(E_{z0} + E_z(t))^6, \quad (1)$$

где коэффициенты аппроксимации определяются из формулы Кубо.

Электромагнитное поле $\vec{E}(t), \vec{H}(t)$ не является гармоническим в силу нелинейности электромагнитного процесса. Представим $\vec{E}(t), \vec{H}(t)$ в основной области V_0 ВТ (рис. 1) и на входных сечениях S_1, S_2, S_3, S_4 ВТ в виде разложения по комбинационным частотам [3]:

$$\vec{E}(t) = \sum_{k,n=-\infty}^{\infty} \vec{E}(\omega_{k,n}) \exp(i\omega_{k,n}t), \quad \vec{H}(t) = \sum_{k,n=-\infty}^{\infty} \vec{H}(\omega_{k,n}) \exp(i\omega_{k,n}t). \quad (2)$$

где $\omega_{k,n} = k\omega_1 + n\omega_2$ – комбинационные частоты, k, n – целые числа.

Запишем $\vec{E}(t), \vec{H}(t)$ в декартовой системе координат:

$$\vec{E}(t) = E_x(t)\vec{i} + E_y(t)\vec{j} + E_z(t)\vec{k}, \quad \vec{H}(t) = H_x(t)\vec{i} + H_y(t)\vec{j} + H_z(t)\vec{k} \quad (3)$$

Пусть $\vec{E}(t), \vec{H}(t)$, а, следовательно, и составляющие $E_x(t), E_y(t), E_z(t), H_x(t), H_y(t), H_z(t)$, есть периодические функции времени (период T).

Разложим составляющую $E_x(t)$ вектора $\vec{E}(t)$ в ряд Фурье в комплексной форме, используя частоты ω_1 ($\omega_1 T = 2\pi$) и ω_2 ($\omega_2 T = 2\pi$):

$$\frac{1}{E_x^2(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{E_x^2(k\omega_1)} \exp(ik\omega_1 t), \quad (4)$$

$$\frac{1}{E_x^2(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{E_x^2(n\omega_2)} \exp(in\omega_2 t). \quad (5)$$

где

$$\frac{1}{E_x^2(k\omega_1)} = \frac{\omega_1}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_1}^{\pi/\omega_1} E_x^2(t) \exp(-ik\omega_1 t) dt,$$

$$\frac{1}{E_x^2(n\omega_2)} = \frac{\omega_1}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_2}^{\pi/\omega_2} E_x^2(t) \exp(-in\omega_2 t) dt.$$

Из (4) и (5) следует

$$E_x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_x(k\omega_1, n\omega_2) \exp(i(k\omega_1 + n\omega_2)t), \quad (6)$$

где $E_x(k\omega_1, n\omega_2) = E_x^2(k\omega_1) E_x^2(n\omega_2)$.

Запишем (6) в терминах комбинационных частот [3]

$$E_x(t) = \sum_{k,n=-\infty}^{\infty} E_x(\omega_{k,n}) \exp(i\omega_{k,n}t). \quad (7)$$

Таким же образом можно представить и остальные составляющие $E_y(t)$, $E_z(t)$, $H_x(t)$, $H_y(t)$, $H_z(t)$ векторов $\vec{E}(t)$, $\vec{H}(t)$.

Электрическое поле $E_{z0} + E_z(t)$ представим в виде

$$\begin{aligned} E_{z0} + E_z(t) &= E_{z0} + E_{zm} \cos \omega_2 t = \\ &= \sum_{l=-1}^1 E_z(\omega_{0,l}) \exp(il\omega_2 t) = \sum_{l=-1}^1 E_z(\omega_{0,l}) \exp(i\omega_{0,l}t), \end{aligned} \quad (8)$$

где $E_z(\omega_{00}) = E_{z0}$, $E_z(\omega_{01}) = E_z(\omega_{0,-1}) = \frac{1}{2} E_{zm}$.

Подставляя (8) в (7), получаем следующее выражение для нелинейной поверхностной проводимости σ_s графена как функции электрического поля $E_{z0} + E_z(t)$:

$$\begin{aligned} \sigma_s(t) &= \sigma_0 + \sigma_2 \sum_{l_1=-1}^1 E_z(\omega_{0,l_1}) \sum_{l_2=-1}^1 E_z(\omega_{0,l_2}) \exp(i(\omega_{0,l_1} + \omega_{0,l_2})t) + \sigma_4 \times \\ &\times \sum_{l_1=-1}^1 E_z(\omega_{0,l_1}) \sum_{l_2=-1}^1 E_z(\omega_{0,l_2}) \sum_{l_3=-1}^1 E_z(\omega_{0,l_3}) \sum_{l_4=-1}^1 E_z(\omega_{0,l_4}) \exp(i(\omega_{0,l_1} + \omega_{0,l_2} + \omega_{0,l_3} + \omega_{0,l_4})t) + \\ &+ \sigma_6 \sum_{l_1=-1}^1 E_z(\omega_{0,l_1}) \sum_{l_2=-1}^1 E_z(\omega_{0,l_2}) \sum_{l_3=-1}^1 E_z(\omega_{0,l_3}) \sum_{l_4=-1}^1 E_z(\omega_{0,l_4}) \sum_{l_5=-1}^1 E_z(\omega_{0,l_5}) \sum_{l_6=-1}^1 E_z(\omega_{0,l_6}) \times \\ &\times \exp(i(\omega_{0,l_1} + \omega_{0,l_2} + \omega_{0,l_3} + \omega_{0,l_4} + \omega_{0,l_5} + \omega_{0,l_6})t). \end{aligned} \quad (9)$$

Подставляя (2) и (9) в уравнения Максвелла (5) получаем системы стационарных нелинейных уравнений Максвелла на комбинационных частотах $\omega_{k,n}$:

$$\begin{aligned}\text{rot}\vec{H}(\omega_{k,n}) &= i\omega_{k,n}\varepsilon_0\dot{\varepsilon}_b(\omega_{k,n})\vec{E}(\omega_{k,n}) + \vec{J}_b(\omega_{k,n}), \\ \text{rot}\vec{E}(\omega_{k,n}) &= -i\omega_{k,n}\mu_0\mu_b(\omega_{k,n})\vec{H}(\omega_{k,n}),\end{aligned}\quad (10)$$

где

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_b &= \varepsilon_b - i\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\omega_{k,n}d}, \quad \vec{J}_b(\omega_m) = \sum_{q=1}^{\infty} A_q \vec{E}(\omega_q), \\ A_q &= \dot{\sigma}_2(\omega_m) \sum_{r_1=0}^3 E_z(\omega_{r_1}) \sum_{r_2=0}^3 E_z(\omega_{r_2}) \gamma_2 + \\ &+ \dot{\sigma}_4(\omega_m) \sum_{r_1=0}^3 E_z(\omega_{r_1}) \sum_{r_2=0}^3 E_z(\omega_{r_2}) \sum_{r_3=0}^3 E_z(\omega_{r_3}) \sum_{r_4=0}^3 E_z(\omega_{r_4}) \gamma_4 + \dot{\sigma}_6(\omega_m) \times \\ &\times \sum_{r_1=0}^3 E_z(\omega_{r_1}) \sum_{r_2=0}^3 E_z(\omega_{r_2}) \sum_{r_3=0}^3 E_z(\omega_{r_3}) \sum_{r_4=0}^3 E_z(\omega_{r_4}) \sum_{r_5=0}^3 E_z(\omega_{r_5}) \sum_{r_6=0}^3 E_z(\omega_{r_6}) \gamma_6,\end{aligned}\quad (11)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\gamma_2 &= \begin{cases} 0, & \text{если } \omega_{r,q} + \omega_{0,l_1} + \omega_{0,l_2} \neq \omega_{k,n} \\ 1, & \text{если } \omega_{r,q} + \omega_{0,l_1} + \omega_{0,l_2} = \omega_{k,n} \end{cases}, \\ \gamma_4 &= \begin{cases} 0, & \text{если } \omega_{r,q} + \omega_{0,l_1} + \omega_{0,l_2} + \omega_{0,l_3} + \omega_{0,l_4} \neq \omega_{k,n} \\ 1, & \text{если } \omega_{r,q} + \omega_{0,l_1} + \omega_{0,l_2} + \omega_{0,l_3} + \omega_{0,l_4} = \omega_{k,n} \end{cases}, \\ \gamma_6 &= \begin{cases} 0, & \text{если } \omega_{r,q} + \omega_{0,l_1} + \omega_{0,l_2} + \omega_{0,l_3} + \omega_{0,l_4} + \omega_{0,l_5} + \omega_{0,l_6} \neq \omega_{k,n} \\ 1, & \text{если } \omega_{r,q} + \omega_{0,l_1} + \omega_{0,l_2} + \omega_{0,l_3} + \omega_{0,l_4} + \omega_{0,l_5} + \omega_{0,l_6} = \omega_{k,n} \end{cases}, \\ \gamma_i &= \begin{cases} 0, & \text{if } \omega_{r,q} + \omega_{0,l_1} + \omega_{0,l_2} + \dots + \omega_{0,l_i} \neq \omega_{k,n} \\ 1, & \text{if } \omega_{r,q} + \omega_{0,l_1} + \omega_{0,l_2} + \dots + \omega_{0,l_i} = \omega_{k,n}, \quad i = 2, 4, 6; \end{cases}\end{aligned}$$

Здесь $q = \{s, u\}$, $r_1 = \{0, l_1\}$, $r_2 = \{0, l_2\}$, \dots , $r_6 = \{0, l_6\}$.

Выражение для тока $\vec{J}_b(\omega_m)$ (11) получено в предположении, что напряженность электрического поля $E_{z0} + E_z(t)$ в области графена не зависит от координат вследствие малой толщины монослоя графена.

Постановка задачи дифракции состоит в следующем: электромагнитное поле в основной области ВТ (рис. 1) должно удовлетворять:

в области графена – системе нелинейных уравнений Максвелла на комбинационных частотах (10);

в области диэлектрических слоев – системе однородных уравнений Максвелла

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\vec{H}(\omega_{k,n}) &= i\omega_{k,n}\varepsilon_0\varepsilon_a(\omega_{k,n})\vec{E}(\omega_{k,n}), \\ \operatorname{rot}\vec{E}(\omega_{k,n}) &= -i\omega_{k,n}\mu_0\mu_a(\omega_{k,n})\vec{H}(\omega_{k,n}),\end{aligned}\quad (12)$$

где ε_a, μ_a – относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости диэлектрика; на входных сечениях S_1, S_2, S_3, S_4 ВТ (рис. 1) – условиям неасимптотического излучения [4].

2. Построение вычислительного алгоритма решения нелинейной задачи дифракции

Построим вычислительный алгоритм решения нелинейной краевой задачи дифракции для определения дескриптора ВТ - матрицы проводимости \mathbf{Y} . Запишем систему стационарных нелинейных уравнений Максвелла на комбинационных частотах (10), используя кусочно-неоднородное заполнение области ВТ:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\vec{H}(\omega_m) &= i\omega_m\varepsilon_0\varepsilon(\omega_m)\vec{E}(\omega_m) + \vec{J}(\omega_m), \\ \operatorname{rot}\vec{E}(\omega_m) &= -i\omega_m\mu_0\mu(\omega_m)\vec{H}(\omega_m), \quad m = 1, 2, \dots,\end{aligned}\quad (13)$$

$$\varepsilon(\omega_m) = \begin{cases} \varepsilon_d(\omega_m), & \text{в области } V_d, \\ \varepsilon_a(\omega_m), & \text{в области диэлектрических слоёв } V_{\text{пл.}}, \end{cases}$$

$$\mu(\omega_m) = \begin{cases} \mu_d(\omega_m), & \text{в области } V_d, \\ \mu_a(\omega_m), & \text{в области диэлектрических слоёв } V_{\text{пл.}}, \end{cases}$$

$$\vec{J}(\omega_m) = \begin{cases} \vec{J}_d(\omega_m), & \text{в области } V_d, \\ 0, & \text{в области диэлектрических слоёв } V_{\text{пл.}} \end{cases}$$

В (13) используется обобщенный индекс m , определенный на множестве индексов $\{k, n\}$.

Построим проекционную модель [5] для уравнений Максвелла на комбинационных частотах (13). Используя тождество векторного анализа $\vec{b}\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\operatorname{rot}\vec{b} = \operatorname{rot}(\vec{a} \times \vec{b})$, формулу Остроградского – Гаусса и условие неасимптотического излучения [4], запишем для уравнений (13) проекционную модель в интегральной форме [5]:

$$\oint_{S_\Sigma} (\vec{E}(\omega_m) \times \vec{H}_k^*) \cdot d\vec{S} = -i\omega \mu_0 \int_{V_0} \mu \vec{H}(\omega_m) \cdot \vec{H}_k^* dV + i\omega_k \varepsilon_0 \int_{V_0} \vec{E}(\omega_m) \cdot \vec{E}_k^* dV,$$

$$\oint_{S_\Sigma} (\vec{H}(\omega_m) \times \vec{E}_k^*) \cdot d\vec{S} = i\omega \varepsilon_0 \int_{V_0} \varepsilon \vec{E}(\omega_m) \cdot \vec{E}_k^* dV - i\omega_k \mu_0 \int_{V_0} \vec{H}(\omega_m) \cdot \vec{H}_k^* dV +$$

$$+ \sum_{q=1}^{\infty} A_q \int_{V_0} E(\omega_q) \cdot \vec{E}_k^* dV, \quad k=1,2,\dots,N_{\text{баз.}}, \quad m=1,2,\dots,M, \quad (14)$$

где $N_{\text{баз.}}$ – число учитываемых базисных функций, M – число учитываемых комбинационных частот, $S_{\Sigma} = S_1 \cup S_3$.

Дополним уравнения (14) условием неасимптотического излучения [4]

$$\frac{1}{2} \int_{S_{\alpha}} (\vec{E}_{\alpha}(\omega_m) \times \vec{h}_{k(\alpha)}^*) \cdot d\vec{S}_{\alpha} - \frac{1}{2} \int_{S_{\alpha}} (\vec{e}_{k(\alpha)} \times \vec{H}_{\alpha}^*(\omega_m)) \cdot d\vec{S}_{\alpha} = c_{k(\alpha)}^-(\omega_m), \quad (15)$$

$$k=1,2,\dots,N, \quad m=1,2,\dots,M, \quad \alpha=1,3.$$

Решение нелинейной краевой задачи дифракции ищем в виде рядов Фурье по системам базисных функций $\{\vec{E}_n\}$, $\{\vec{H}_n\}$ (собственные функции прямоугольного резонатора с областью V_0) и $\{\vec{e}_{l(\beta)}\}$, $\{\vec{h}_{l(\beta)}\}$ (собственные функции каналов Флоке):

в основной области V_0 ВТ (рис. 1)

$$\vec{E}(\omega_m) = \sum_{n=1}^{N_{\text{баз.}}} \tilde{a}_n(\omega_m) \vec{E}_n, \quad \vec{H}(\omega_m) = \sum_{n=1}^{N_{\text{баз.}}} \tilde{b}_n(\omega_m) \vec{H}_n, \quad m=1,2,\dots,M.; \quad (16)$$

на входных сечениях S_1 и S_3 ВТ:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\beta}(\omega_m) &= \sum_{l=1}^L \left(c_{l(\beta)}^+(\omega_m) + c_{l(\beta)}^-(\omega_m) \right) \vec{e}_{l(\beta)}, \\ \vec{H}_{\beta}(\omega_m) &= \sum_{l=1}^L \left(c_{l(\beta)}^+(\omega_m) - c_{l(\beta)}^-(\omega_m) \right) \vec{h}_{l(\beta)}, \quad \beta=1,3, \end{aligned} \quad (17)$$

где L – число учитываемых типов волн в канале Флоке.

Подставляя (16), (17) в (13) и (16) в (15), получаем следующую систему матричных уравнений на комбинационных частотах:

$$\left\{ \begin{aligned} & \mathbf{N} \cdot \mathbf{c}^-(\omega_m) - \mathbf{A} \cdot \tilde{\mathbf{a}}(\omega_m) + \mathbf{B} \cdot \tilde{\mathbf{b}}(\omega_m) = -\mathbf{N} \cdot \mathbf{c}^+(\omega_m), \\ & \mathbf{M} \cdot \mathbf{c}^-(\omega_m) + \mathbf{C} \cdot \tilde{\mathbf{a}}(\omega_m) - \mathbf{D} \cdot \tilde{\mathbf{b}}(\omega_m) + \sum_{q=1}^L A_q \mathbf{F} \cdot \mathbf{c}^-(\omega_q) = \\ & = \mathbf{M} \cdot \mathbf{c}^+(\omega_m) - \sum_{q=1}^L A_q \mathbf{F} \cdot \mathbf{c}^+(\omega_q), \\ & \mathbf{I} \cdot \mathbf{c}^-(\omega_m) - \mathbf{R} \cdot \tilde{\mathbf{a}}(\omega_m) + \mathbf{U} \cdot \tilde{\mathbf{b}}(\omega_m) = 0, \quad m=1,2,\dots,M, \end{aligned} \right. \quad (18)$$

где \mathbf{I} – единичная матрица, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{F}, \mathbf{R}, \mathbf{U}$ – матрицы с элементами:

$$N_{kl(\beta)} = \int_{S_\beta} (\vec{e}_{l(\beta)} \times \vec{H}_k^*) \cdot d\vec{S}_\beta; \quad A_{kn} = i\omega_k \epsilon_0 \int_{V_0} (\vec{E}_n \cdot \vec{E}_k^*) dV;$$

$$B_{kn} = i\omega \mu_0 \int_{V_0} \mu (\vec{H}_n \cdot \vec{H}_k^*) dV;$$

$$M_{kl(\beta)} = \int_{S_\beta} (\vec{h}_{l(\beta)} \times \vec{E}_k^*) \cdot d\vec{S}_\beta; \quad C_{kn} = i\omega \epsilon_0 \int_{V_0} \epsilon (\vec{E}_n \cdot \vec{E}_k^*) dV;$$

$$B_{kn} = i\omega_k \mu_0 \int_{V_0} (\vec{H}_n \cdot \vec{H}_k^*) dV;$$

$$F_{kn} = \int_{V_0} (\vec{E}_n \cdot \vec{E}_k^*) dV; \quad U_{q(\alpha)n} = \frac{1}{2} \int_{S_\alpha} (\vec{e}_{q(\alpha)} \times \vec{H}_n^*) \cdot d\vec{S}_\alpha;$$

$$R_{q(\alpha)n} = \frac{1}{2} \int_{S_\alpha} (\vec{E}_n^* \times \vec{h}_{q(\alpha)}) \cdot d\vec{S}_\alpha$$

$$\alpha, \beta = 1, 3; \quad k, n = 1, 2, \dots, N; \quad q, l = 1, 2, \dots, L.$$

Здесь N – число базисных функций, учитываемых в объеме V_0 ВТ; L – число базисных функций, учитываемых на входных сечениях ВТ.

Векторы $\tilde{\mathbf{a}}(\omega_m)$, $\tilde{\mathbf{b}}(\omega_m)$, $\mathbf{c}^-(\omega_m)$, $\mathbf{c}^+(\omega_m)$ (18) составлены из коэффициентов рядов Фурье (16) $\{\tilde{a}_n(\omega_m)\}$, $\{\tilde{b}_n(\omega_m)\}$ и (17) $\{c_{l(\beta)}^+(\omega_m)\}$, $\{c_{l(\beta)}^-(\omega_m)\}$.

Известными в системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (18) являются амплитуды $C_{1(1)}^+(\omega_1)$, $C_{1(2)}^+(\omega_2)$ падающих *ТЕМ*-волн сигнала и накачки на входных сечениях ВТ S_β , $\beta=1,2$. Амплитуды всех остальных волн канала Флоке на входном сечении S_1 ВТ равны нулю, то есть вектор $\mathbf{c}^+(\omega_1)$ в (18) имеет только одну компоненту (моду) – *ТЕМ*-волну с амплитудой $c_{1(1)}^+(\omega_1)$.

Из решения СЛАУ (18) определяем векторы (17) $\mathbf{c}^-(\omega_1)$, $\mathbf{c}^-(\omega_2)$, ..., $\mathbf{c}^-(\omega_m)$, содержащие амплитуды $C_{l(\beta)}^-(\omega_m)$ отраженных волн различных типов волн в каналах Флоке на входных сечениях S_1, S_3 ВТ на комбинационных частотах ω_m . Отметим, что на сечении S_3 амплитудные коэффициенты $C_{l(\beta)}^-(\omega_m)$ имеют физический смысл коэффициентов прохождения различных мод [1] (в локальных системах координат на входных сечениях оси координат o_1z_1 и o_3z_3 направлены внутрь полости ВТ (рис. 1)).

Комбинационная частота $\omega_1 = 1\omega_1 + 0\omega_2$ совпадает с частотой сигнала ω_1 , комбинационная частота $\omega_2 = 0\omega_1 + 1\omega_2$ - с частотой накачки ω_2 , и для рассматриваемого случая СЛАУ (18) несколько упрощается. Запишем СЛАУ (18) в развернутом виде:

$$\begin{aligned}
& N \cdot c^-(\omega_1) - A \cdot \tilde{a}(\omega_1) + B \cdot \tilde{b}(\omega_1) = -N \cdot c^+(\omega_1), \\
& (M + A_1F) \cdot c^-(\omega_1) + C \cdot \tilde{a}(\omega_1) - D \cdot \tilde{b}(\omega_1) + A_2F \cdot c^-(\omega_2) + A_3F \cdot c^-(\omega_3) + \dots \\
& \dots + A_qF \cdot c^-(\omega_q) + \dots + A_mF \cdot c^-(\omega_m) = M \cdot c^+(\omega_1) - A_1F \cdot c^+(\omega_1), \\
& I \cdot c^-(\omega_1) - R \cdot \tilde{a}(\omega_1) + U \cdot \tilde{b}(\omega_1) = 0, \\
& N \cdot c^-(\omega_q) - A \cdot \tilde{a}(\omega_q) + B \cdot \tilde{b}(\omega_q) = 0, \\
& (M + A_qF) \cdot c^-(\omega_q) + C \cdot \tilde{a}(\omega_q) - D \cdot \tilde{b}(\omega_q) + A_1F \cdot c^-(\omega_1) + A_2F \cdot c^-(\omega_2) + \dots \\
& \dots + A_{q-1}F \cdot c^-(\omega_{q-1}) + A_{q+1}F \cdot c^-(\omega_{q+1}) \dots + A_mF \cdot c^-(\omega_m) = 0, \\
& I \cdot c^-(\omega_q) - R \cdot \tilde{a}(\omega_q) + U \cdot \tilde{b}(\omega_q) = 0, \\
& \dots \\
& N \cdot c^-(\omega_m) - A \cdot \tilde{a}(\omega_m) + B \cdot \tilde{b}(\omega_m) = 0, \\
& (M + A_mF) \cdot c^-(\omega_m) + C \cdot \tilde{a}(\omega_m) - D \cdot \tilde{b}(\omega_m) + A_1F \cdot c^-(\omega_1) + A_2F \cdot c^-(\omega_2) + \dots \\
& \dots + A_{m-2}F \cdot c^-(\omega_{m-2}) + A_{m-1}F \cdot c^-(\omega_{m-1}) = 0, \\
& I \cdot c^-(\omega_m) - R \cdot \tilde{a}(\omega_m) + U \cdot \tilde{b}(\omega_m) = 0,
\end{aligned} \tag{19}$$

СЛАУ (9.19.) приведем для программирования на компьютере к виду:

$$\begin{pmatrix}
N & 0 & \dots & 0 & -A & 0 & \dots & 0 & B & 0 & \dots & 0 \\
M + A_1F & A_2F & \dots & A_mF & C & 0 & \dots & 0 & -D & 0 & \dots & 0 \\
I & 0 & \dots & 0 & -R & 0 & \dots & 0 & U & 0 & \dots & 0 \\
0 & N & \dots & 0 & -A & 0 & \dots & 0 & B & 0 & \dots & 0 \\
A_1F & M + A_2F & \dots & A_mF & 0 & C & \dots & 0 & 0 & -D & \dots & 0 \\
0 & I & \dots & 0 & 0 & -R & \dots & 0 & 0 & U & \dots & 0 \\
\dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & N & 0 & 0 & \dots & -A & 0 & 0 & \dots & B \\
A_1F & A_2F & \dots & M + A_mF & 0 & 0 & \dots & C & 0 & 0 & \dots & -D \\
0 & 0 & \dots & I & 0 & 0 & \dots & -R & 0 & 0 & \dots & U
\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}
c^-(\omega_1) \\
c^-(\omega_2) \\
\dots \\
c^-(\omega_m) \\
\tilde{a}(\omega_1) \\
\tilde{a}(\omega_2) \\
\dots \\
\tilde{a}(\omega_m) \\
\tilde{b}(\omega_1) \\
\tilde{b}(\omega_2) \\
\dots \\
\tilde{b}(\omega_m)
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
v(\omega_1) \\
w(\omega_1) \\
\dots \\
0 \\
0 \\
0 \\
\dots \\
0 \\
0 \\
0 \\
\dots \\
0
\end{pmatrix} \tag{20}$$

где $v(\omega_1) = N \cdot c^-(\omega_1)$, $w(\omega_1) = M \cdot c^+(\omega_1) - A_1F \cdot c^+(\omega_1)$.

3. Результаты моделирования параметрических устройств ТГц диапазона на основе графенового метаматериала

На рис. 2 показаны нелинейные зависимости мнимой части поверхностной проводимости графена $Im\sigma_s$ от напряженности электрического поля E_0 , рассчитанные по формуле Кубо (сплошные линии), и их аппроксимация (пунктирные линии) четным многочленом 6-ой степени (1) на частотах $f_1 = 14,15$ ТГц, $f_2 = 28,3$ ТГц.

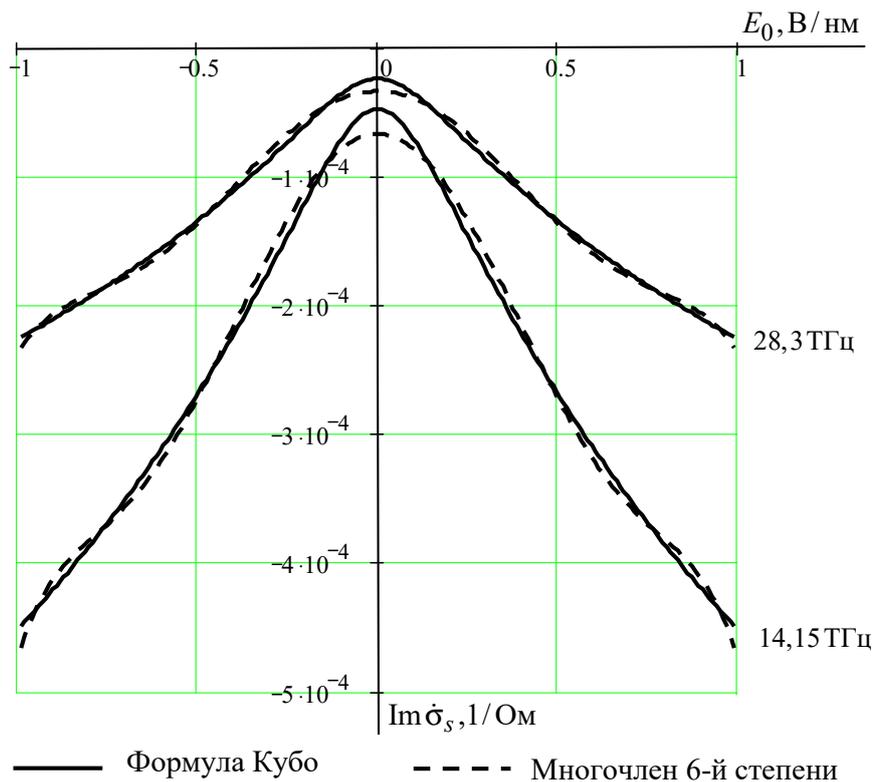


Рис. 2. Расчетные зависимости мнимой части поверхностной проводимости $Im\sigma_s$ графена от напряженности электрического поля E_0 и их аппроксимация: сплошные линии – расчет по формуле Кубо[2]; пунктирные линии - аппроксимация четным многочленом 6-ой степени; $f_1 = 14,15$ ТГц, $f_2 = 28,3$ ТГц

Значения коэффициентов аппроксимирующих многочленов, определяемые из формулы Кубо [2], приведены в табл. 1.

Таблица 1

Коэффициенты аппроксимирующих многочленов 6-й степени

f , ТГц	σ_0	σ_2	σ_4	σ_6
14,15	$-6,68302 \cdot 10^{-5}$	$-1,15845 \cdot 10^{-3}$	$1,55191 \cdot 10^{-3}$	$-8,00671 \cdot 10^{-4}$
28,3	$-3,34278 \cdot 10^{-5}$	$-5,79446 \cdot 10^{-4}$	$7,76290 \cdot 10^{-4}$	$-4,00487 \cdot 10^{-4}$

На рис. 3 показана структура и расчетная схема параметрического ТГц устройства (усилителя и генератора) на основе графенового метаматериала (многослойной структуры графен-диэлектрик, состоящей из чередующихся N слоев графен-диэлектрик SiO_2 ($\epsilon_a = 2,2$) $d_1 = 10\text{нм}$; центральный диэлектрик – аморфный германий $\alpha\text{-Ge}$ ($\epsilon_a = 18,5$), $d_2 = 2800\text{нм}$).

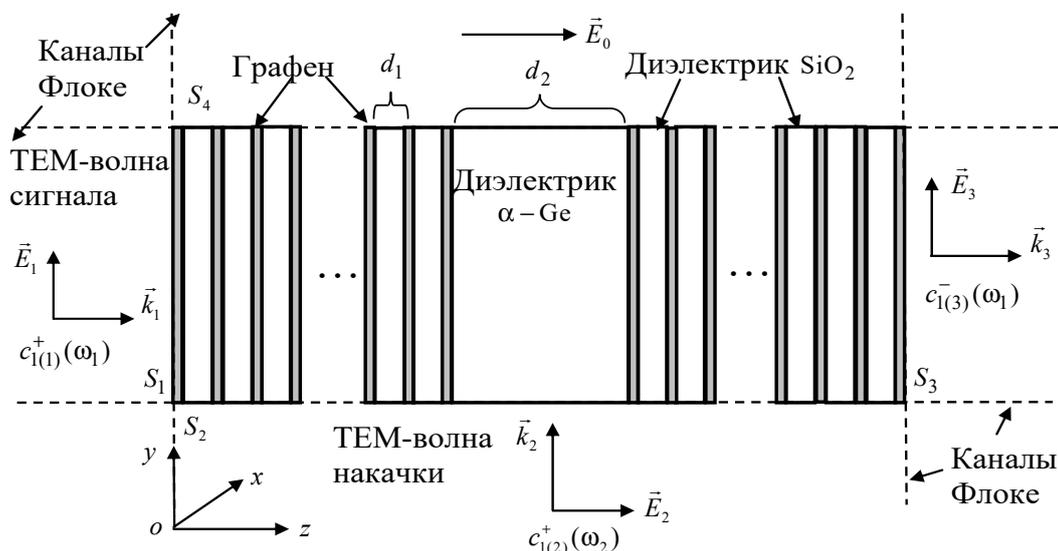


Рис. 3. Структура и расчетная схема параметрического ТГц устройства (усилителя и генератора) на основе графенового метаматериала, представленного в виде ВТ с каналами Флоке на входных сечениях S_1, S_2, S_3, S_4 : ТЕМ-волна сигнала (частота ω_1 , амплитуда $C_{1(1)}^+(\omega_1)$); ТЕМ-волна накачки (частота ω_2 , амплитуда $C_{1(2)}^+(\omega_2)$); прошедшая (или возбуждаемая) ТЕМ-волна (частота ω_1 , амплитуда $C_{1(3)}^-(\omega_1)$); $d_1 = 10\text{нм}$, $d_2 = 2800\text{нм}$, SiO_2 ($\epsilon_a = 2,2$), $\alpha\text{-Ge}$ ($\epsilon_a = 18,5$)

Методом ФАБ проведен электродинамический расчет частотных зависимостей элемента матрицы рассеяния $|S_{31}|$ – коэффициента прохождения ТЕМ-волны сигнала через устройство на основе графенового метаматериала (рис. 3) в линейном (малосигнальном) режиме (в отсутствие волны накачки) для различных значениях химического потенциала μ_c (внешнего постоянного электрического поля E_z) в ТГц диапазоне частот.

Результаты математического моделирования получены методом ФАБ [6].

Результаты электродинамического расчета частотных характеристик коэффициента прохождения через многослойные ($N=39, 79$) фильтры на основе графенового метаматериала с вышеуказанными параметрами и геометрическими размерами) представлены на рис. 4, 5.

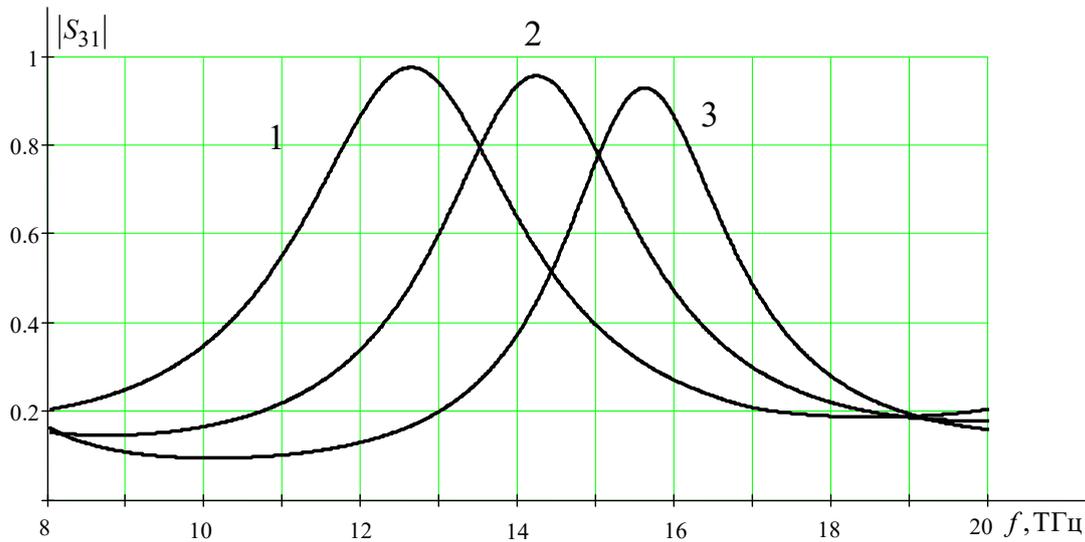


Рис. 4. Спектральные характеристики многослойного ($N=39$) фильтра параметрического усилителя на основе графенового метаматериала для различных значений химического потенциала μ_c :
 кривая 1 – $E_{z0} = 0 \text{ В/нм} - \mu_c = 0 \text{ эВ}$, 2 – $E_{z0} = 0,5 \text{ В/нм} - \mu_c = 0,2 \text{ эВ}$,
 3 – $E_{z0} = 1,0 \text{ В/нм} - \mu_c = 0,4 \text{ эВ}$; $d_1 = 10 \text{ нм}$, $d_2 = 2800 \text{ нм}$,
 SiO_2 ($\epsilon_a = 2,2$), $\alpha\text{-Ge}$ ($\epsilon_a = 18,5$)

Из результатов расчета (рис. 4) следует, что имеется максимум коэффициента прохождения $|S_{31}|$, определяющий полосу пропускания фильтра, на резонансной частоте в ТГц диапазоне частот. Положение максимума $|S_{31}|$ зависит от значения химического потенциала μ_c , т.е. характерные резонансные частоты f_0 такого полосно-пропускающего многослойного фильтра изменяются при изменении μ_c и, следовательно, управляются внешним электрическим полем.

Как следует из результатов электродинамического расчета, при изменении постоянного электрического поля на величину $\Delta E_{z0} = 0,5 \text{ В/нм}$ резонансная частота фильтра изменяется при $N=39$ 10% (рис. 4) (при $N=79$ на 18% (рис. 5), что определяет управляемость характеристик параметрических ТГц устройств (усилителя, генератора) на основе графенового метаматериала.

Результаты электродинамического расчета коэффициента усиления параметрического усилителя $k_y = |C_{-1(3)}^-(\omega_1)| / |C_{+1(1)}^+(\omega_1)|$, т.е. модуля нормированной амплитуды $|C_{-1(3)}^-(\omega_1)| / |C_{+1(1)}^+(\omega_1)|$ прошедшей ТЕМ-волны (отраженной на выходном сечении S_3 в локальной системе координат) по отношению к амплитуде $C_{+1(1)}^+(\omega_1)$ падающей (на входное сечение S_1) ТЕМ-волны сигнала с частотой $f_1 = 14,15 \text{ ТГц}$ в зависимости от амплитуды $C_{+1(2)}^+(\omega_2) = E_{zm}$ ТЕМ-волны накачки с частотой $f_2 = 29,3 \text{ ТГц}$ для $\mu_c = 0,2 \text{ эВ}$ ($E_{z0} = 0,5 \text{ В/нм}$) приведены на рис. 6.

Результаты математического моделирования получены при $N_{\text{баз.}} = 72$ ($N_{\text{баз.}}$ - число базисных функций в проекционной модели (14)),

$L = 5$ (L - число типов волн, учитываемых на входных сечениях ВТ). Дальнейшее расширение базисов $N_{\text{баз.}} = 98$, $L = 10$ практически не изменяло результаты расчетов (штриховая кривая на рис. 6).

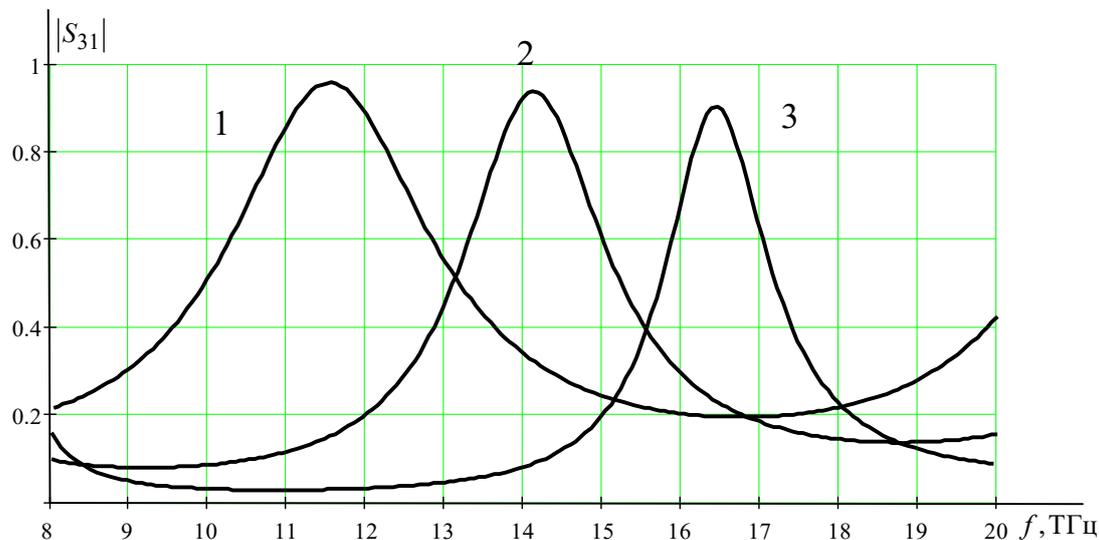


Рис. 5. Спектральные характеристики многослойного ($N = 79$) фильтра параметрического генератора на основе графенового метаматериала для различных значений химического потенциала μ_c : кривая 1 – $E_{z0} = 0 \text{ В/нм} - \mu_c = 0 \text{ эВ}$, 2 – $E_{z0} = 0,5 \text{ В/нм} - \mu_c = 0,2 \text{ эВ}$, 3 – $E_{z0} = 1,0 \text{ В/нм} - \mu_c = 0,4 \text{ эВ}$; $d_1 = 10 \text{ нм}$, $d_2 = 3120 \text{ нм}$, SiO_2 ($\epsilon_a = 2,2$), $\alpha\text{-Ge}$ ($\epsilon_a = 18,5$)

Зависимость коэффициента усиления $k_y = |C_{1(3)}^-(\omega_1)| / |C_{1(1)}^+(\omega_1)|$ от амплитуды $C_{1(2)}^+(\omega_2)$ ТЕМ-волны накачки (рис. 5) определялась из решения СЛАУ (19) при условии, что амплитуда $C_{1(1)}^+(\omega_1)$ значительно меньше амплитуды $C_{1(2)}^+(\omega_2)$.

При анализе устойчивого режима регенеративного параметрического усиления ($C_{1(1)}^+(\omega_1) \neq 0$), СЛАУ (19) является неоднородной и имеет решение, если определитель матрицы СЛАУ отличен от нуля.

При анализе режима генерации ($C_{1(1)}^+(\omega_1) = 0$) СЛАУ (19) является однородной и имеет отличное от нуля решение, если определитель матрицы СЛАУ равен нулю. Таким образом, исследование на основе математической модели возможности генерирования волн параметрическим устройством сводится к анализу определителя матрицы СЛАУ.

Из результатов математического моделирования следует, что в параметрическом ТГц устройстве на основе многослойного (при $N = 39$) графенового метаматериала генерация волн на частоте 14,15 ТГц не наблюдается. Имеется единственное устойчивое состояние - режим регенеративного параметрического усиления, параметрическое возбуждение колебаний отсутствует. Для перехода устойчивого режима параметрического усиления в неустойчивый режим параметрической генерации

необходимо либо увеличивать амплитуду $C_{1(2)}^+(\omega_2)$ волны накачки, либо число слоев ($N=79$) графенового метаматериала (рис. 5), что приводит к требуемому возрастанию нелинейности среды (графена).

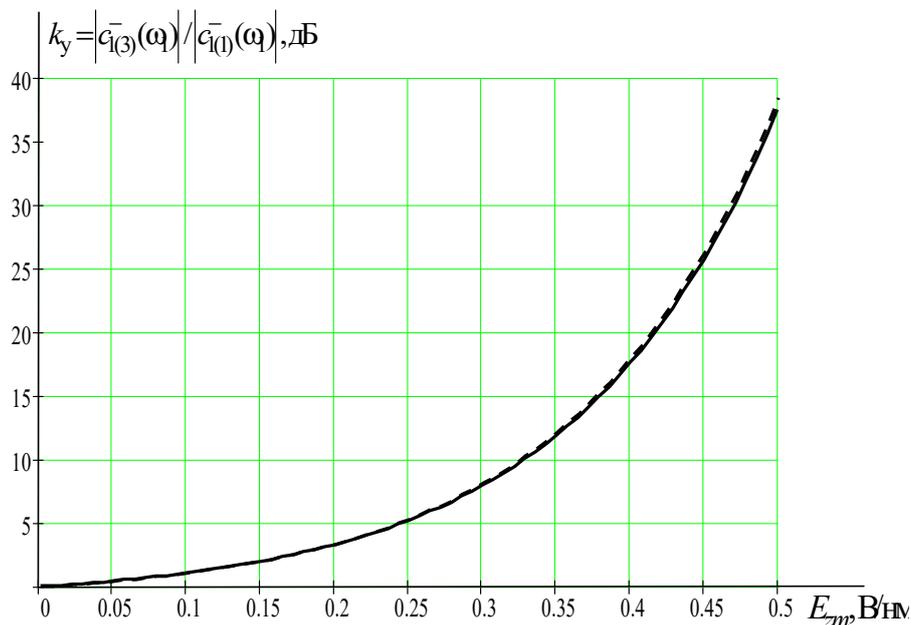


Рис. 6. Режим регенеративного параметрического усиления: зависимость нормированной амплитуды $|C_{1(3)}^-(\omega_1)|/|C_{1(1)}^-(\omega_1)|$ прошедшей (на выходном сечении S_3) ТЕМ-волны по отношению к амплитуде $C_{1(1)}^+(\omega_1)$ падающей (на входное сечение S_1) ТЕМ-волны сигнала от амплитуды $C_{1(2)}^+(\omega_2)$ ТЕМ-волны накачки; $f_1=14.15$ ТГц, $f_2=29.3$ ТГц; $\mu_c = 0,2$ эВ ($E_{z0} = 0.5$ В/нм) сплошные линии $N_{баз.} = 72, L = 5$; пунктирные линии $N_{баз.} = 98, L = 10$

На основе компьютерного анализа определителя матрицы СЛАУ (19) проведено математическое моделирование возникновения неустойчивого режима, обусловленного нестабильностью волн [7, 8] вследствие параметрического возбуждения падающей ТЕМ-волной накачки волн в многослойном (при $N=79$) графеновом метаматериале.

Результаты электродинамического расчета областей нестабильности, т.е. зависимости амплитуды $c_{1(1)}^+(\omega_H)$ волны накачки от нормированной частоты $(\omega_0/\omega_2)^2$ (ω_0 – резонансная частота фильтра на основе многослойного ($N = 79$) графенового метаматериала, ω_2 - частота волны накачки) приведены на рис. 7 при параметрическом возбуждении в случае неустойчивости первого и второго порядка $\omega_0=n\omega_2/2$, где $n = 1,2$ [9] для $f_0 = 14,15$ ТГц;; $\mu_c = 0.2$ эВ ($E_{z0} = 0.5$ В/нм).

В областях нестабильности (рис. 7) определитель матрицы СЛАУ (19) обращается в нуль или близок к нулю и нелинейное устройство на основе многослойного (при $N = 79$) графенового метаматериала становится параметрическим генератором.

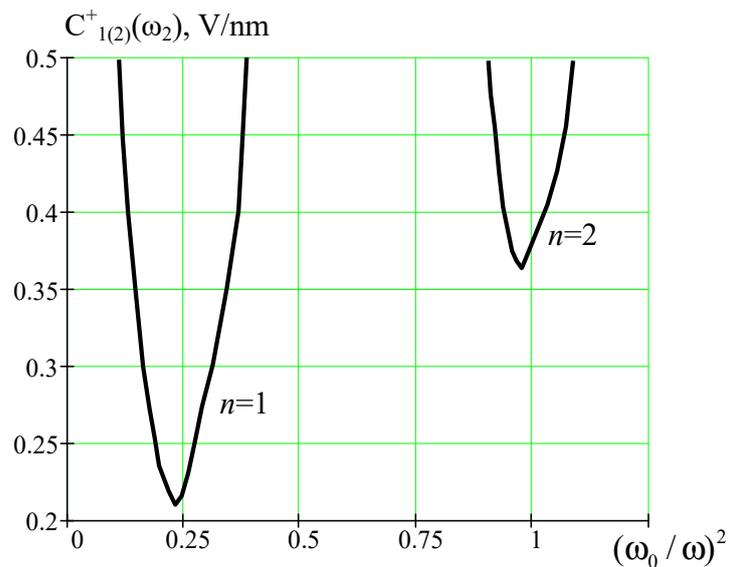


Рис. 7. Области нестабильности при параметрическом возбуждении волн в параметрическом ТГц генераторе на основе графенового метаматериала падающей ТЕМ-волной накачки с амплитудой $C_{1(2)}^+(\omega_2)$ в зависимости от нормированной частоты $(\omega_0/\omega)^2$ (ω_0 – собственная резонансная частота фильтра на основе графенового метаматериала, ω_2 – частота волны накачки): $N=79, f_0=14,15$ ТГц; $\mu_c=0,2$ эВ ($E_{z0}=0,5$ В/нм)

Список литературы

1. Никольский В. В. Декомпозиционный подход к задачам электродинамики. М. : Наука, 1983. 297 с.
2. Hanson G. W. Dyadic Green's functions and guided surface waves for a surface conductivity model of graphene // Journal of Applied Physics. 2008. № 103. P. 064302.
- Никольский В. В. Электродинамика и распространение радиоволн. М. : Наука, 1973.
3. Голованов О. А. Численный алгоритм решения задач дифракции для волноводных устройств СВЧ с нелинейными средами // Радиотехника и электроника. 1990. Т. 35, № 9. С. 1853–1862.
4. Никольский В. В. Проекционные методы в электродинамике : сб. науч.-метод. ст. по прикладной электродинамике. М. : Высш. шк., 1977.
5. Голованов О. А. Автономные блоки с виртуальными каналами Флоке и их применение для решения прикладных задач электродинамики // Радиотехника и электроника. 2006. Т. 51, № 12. С. 1423–1430.
6. Makeeva G. S., Golovanov O. A., Pardavi-Horvath M. Numerical Analysis of Electromagnetic Wave Instability in Nonlinear Ferrite Structures Using Bifurcation Points of the Nonlinear Maxwell's Operator // IEEE Transaction on Magnetics. 2006. Vol. 42, № 10. P. 3350–3352.
7. Макеева Г. С., Голованов О. А. Численное исследование нестабильностей волн и колебаний в нелинейных гироманнитных структурах по точкам бифуркации нелинейного оператора Максвелла // Радиотехника и электроника. 2007. Т. 52, № 1. С. 106–113.
8. Гуревич А. Г., Мелков Г. А. Магнитные колебания и волны. М. : Наука, 1994. 407 с.

Сравнение волновых спектров открытого и закрытого неоднородных волноводов

Максим Олегович Снегур

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

snegur.max15@gmail.com

Аннотация. Рассмотрены задачи распространения поверхностных электромагнитных с ТЕ-поляризацией в линии Губо (идеально проводящий цилиндр, покрытый концентрическим диэлектрическим слоем) и экранированный двухслойный диэлектрический волновод заполнены неоднородной средой. Численно представлены результаты сравнения волновых спектров.

Ключевые слова: задача распространения электромагнитных волн, уравнение Максвелла, дифференциальные уравнения, линия Губо, диэлектрический волновод, ТЕ-поляризация

Финансирование: исследование поддержано грантом РФФИ в рамках научного проекта (№ 20-31-90079).

Comparison of the wave spectra of open and closed inhomogeneous waveguides

Maksim Olegovich Snegur

Penza State University, Penza, Russia

snegur.max15@gmail.com

Abstract. The problems are considered of the propagation of surface TE-polarized electromagnetic waves in the Goubau line (perfectly conducting cylinder covered with a concentric dielectric layer) and a shielded two-layer dielectric waveguide filled with an inhomogeneous medium. Numerical results are presented of the comparison of the wave spectra.

Keywords: electromagnetic wave propagation problem, Maxwell's equation, differential equations, Goubaud line, dielectric waveguide, TE-polarization

Acknowledgments: the reported study was funded by RFBR according to the research project № 20-31-90079.

1. Открытый неоднородный волновод. Постановка задачи

Рассмотрим трехмерное пространство \mathbb{R}^3 , снабженное цилиндрической системой координат $Or\varphi z$ и заполненное изотропной средой без источника с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = \varepsilon_c \varepsilon_0 \equiv const$, где ε_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума. Открытый однослойный цилиндрический металл-диэлектрический волновод круглого сечения.

$$\Sigma := \{(\rho, \varphi, z) : r_0 \leq \rho \leq r, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

с образующей, параллельной оси Oz , помещается в \mathbb{R}^3 .

Сечение волновода плоскостью, перпендикулярной его оси, представляет собой кольцо с внутренним и внешним радиусами r_0 и r . Окружности $\rho = r_0$ и $\rho = r$ – проекции поверхностей идеально проводящего бесконечно тонкого экрана и границы раздела диэлектриков соответственно.

Задача распространения электромагнитной ТЕ-поляризованной волны в открытом металлодиэлектрическом волноводе состоит в нахождении нетривиальных решений однородной системы уравнений Максвелла в виде бегущих волн, т.е. с зависимостью $e^{i\gamma z}$ от координаты z вдоль которой структура регулярна:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega \mathbf{H}, \end{cases} \quad (1)$$

$$\mathbf{E} = (0, E_\varphi(\rho) \mathbf{e}_\varphi, 0) e^{i\gamma z}, \quad \mathbf{H} = (H_\rho(\rho) \mathbf{e}_\rho, 0, H_z(\rho) \mathbf{e}_z) e^{i\gamma z},$$

кроме того, должны выполняться следующие условия: ограниченность энергии поля в любом конечном объеме волновода, обращение в нуль тангенциальных компонент электрического поля на поверхности идеального проводника.

$$E_\varphi \Big|_{\rho=r_0} = 0; \quad (2)$$

непрерывность тангенциальных составляющих на границе раздела сред

$$\left[E_\varphi \right] \Big|_{\rho=r} = 0, \quad \left[H_z \right] \Big|_{\rho=r} = 0, \quad (3)$$

и условия излучения на бесконечности, которые будут сформулированы и обсуждены позже.

Мы предполагаем, что диэлектрическая проницаемость во всем пространстве имеет вид $\boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\varepsilon}_0$, где

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_r(\rho), & r_0 \leq \rho \leq r, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_r, & \rho > r, \end{cases} \quad (4)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_c$ – вещественная положительная постоянная, и что $\boldsymbol{\varepsilon}_r(\rho)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция на интервале $[r_0, r]$, то есть $\boldsymbol{\varepsilon}(\rho) \in C^2[r_0, r]$.

Обозначая $u(\rho) := E_\varphi(\rho)$, и полагая $k_0^2 := \omega^2 \mu_0 \boldsymbol{\varepsilon}_0$, мы получаем

$$\left(\rho^{-1}(\rho u)'\right)' + (k_0^2 \tilde{\epsilon} - \gamma^2)u = 0, \quad (5)$$

где производная означает дифференцирование по ρ и $u(\rho, \gamma)$ – действительная функция.

При $\rho > r$ имеем $\tilde{\epsilon} = \epsilon_c$, тогда из (7) получаем Уравнение Бесселя

$$u'' + \rho^{-1}u' - \rho^{-2}u - \kappa^2 u = 0, \quad (6)$$

где $\kappa^2 = \gamma - k_0^2 \epsilon_c$. Решение (8) имеет вид

$$u = \tilde{C}I_1(\kappa\rho) + CK_1(\kappa\rho), \rho > r,$$

где C и \tilde{C} – постоянные. Известно, что $I_1(\rho)$ стремится к бесконечности при $\rho \rightarrow +\infty$ и $K_1(\rho)$ стремится к нулю при $\rho \rightarrow +\infty$. Учитывая эти свойства и условие на бесконечности, получаем, что $\tilde{C} = 0$ и

$$u = CK_1(\kappa\rho), \rho > r. \quad (7)$$

В оболочке волновода $r_0 \leq \rho \leq r$, где $\tilde{\epsilon} = \epsilon_r(r)$. Тогда из (7) получаем следующее уравнение:

$$u'' + \rho^{-1}u' - \rho^{-2}u + (k_0^2 \epsilon_r - \gamma^2)u = 0. \quad (8)$$

Составляющие тангенциального электромагнитного поля непрерывны. Из условия непрерывности получаем

$$[u]_{\rho=r} = 0, [u']_{\rho=r} = 0, \quad (9)$$

Наконец, поскольку тангенциальные компоненты электрического поля обращаются в ноль на поверхности идеального проводника, мы получаем граничное условие для $u(\rho)$

$$u|_{\rho=r_0} = 0, \quad (10)$$

Определение 1. Задача P_0 : найти $\gamma \in \mathbb{R}$ такое, что существуют нетривиальные решения u дифференциального уравнения (10), удовлетворяющие условиям (11) и (12).

2. Закрытый неоднородный волновод. Формулировка проблемы

Закрытый (экранированный) двухслойный цилиндрический металло-диэлектрический волновод

$$\begin{aligned} \Pi := & \{(\rho, \varphi, z) : r_0 \leq \rho < r, 0 \leq \varphi < 2\pi\} \cup \\ & \{(\rho, \varphi, z) : r_0 \leq \rho < R, 0 \leq \varphi < 2\pi\} \end{aligned}$$

с образующей, параллельной оси Oz , и круглым поперечным сечением находится в \mathbb{R}^3 .

Сечение волновода плоскостью, перпендикулярной к своей оси состоит из двух колец с внутренними радиусами r_0 и r , внешние радиусы r и R соответственно. Круги $\rho = r_0$ и $\rho = R$ – проекции поверхностей идеально проводящего бесконечно тонкого экрана и $\rho = r$ поверхность соприкосновения диэлектриков. Обозначим через $\Delta R = R - r$ толщину внешнего слоя.

Проблема распространения ТЕ-поляризованной волны в волноводе заключается в нахождении нетривиальных решений однородной системы уравнений Максвелла в виде бегущей волны, имеющей зависимость $e^{i\gamma z}$ от координаты z :

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{H} = -i\omega\epsilon\mathbf{E}, \\ \text{rot } \mathbf{E} = i\omega\mathbf{H}, \end{cases} \quad (11)$$

$$\mathbf{E} = (0, E_\varphi(\rho)\mathbf{e}_\varphi, 0)e^{i\gamma z}, \quad \mathbf{H} = (H_\rho(\rho)\mathbf{e}_\rho, 0, H_z(\rho)\mathbf{e}_z)e^{i\gamma z};$$

при которых должны выполняться следующие условия: ограниченность энергия поля в любом конечном объеме волновода,

$$E_\varphi|_{\rho=r_0} = 0; \text{ и } E_\varphi|_{\rho=R} = 0; \quad (12)$$

и непрерывность тангенциальных компонент полей на границе

$$[E_\varphi]|_{\rho=r} = 0, [H_z]|_{\rho=r} = 0, \quad (13)$$

Мы предполагаем, что диэлектрическая проницаемость во всем пространстве имеет вид

$$\tilde{\epsilon} \begin{cases} \epsilon_r(\rho), & r_0 \leq \rho \leq r, \\ \epsilon_c, & r \leq \rho \leq R, \end{cases} \quad (14)$$

Обозначив $v(\rho) := E_\varphi(\rho)$, получим

$$\left(\rho^{-1}(\rho v)'\right)' + (k_0^2\tilde{\epsilon} - \gamma^2)v = 0. \quad (15)$$

Во внутреннем слое волновода $r \leq \rho \leq R$ имеем $\tilde{\epsilon} = \epsilon_c$, то из (19) получаем уравнение Бесселя

$$v'' + \rho^{-1}v' - \rho^{-2}v - \kappa^2v = 0, \quad (16)$$

Решение (20) имеет вид

$$v = \tilde{C}I_1(\kappa\rho) + CK_1(\kappa\rho), r \leq \rho \leq R,$$

где C и \tilde{C} – постоянные. Принимая во внимание условие (16) на внешней границе $\rho = R$, получаем

$$v = \tilde{C}(I_1(\kappa R)K_1(\kappa r) - K_1(\kappa R)I_1(\kappa r)), r \leq \rho \leq R. \quad (17)$$

В оболочке волновода $r_0 \leq \rho \leq r$, имеем $\tilde{\epsilon} = \epsilon_r(r)$. Тогда из (7) получаем следующее уравнение:

$$v'' + \rho^{-1}v' = \rho^{-2}v - (k_0^2\epsilon_r - \gamma)v = 0. \quad (18)$$

Из условия непрерывности тангенциальных составляющих мы получаем

$$[v]_{\rho=r} = 0, [v']_{\rho=r} = 0, \quad (19)$$

Определение 2. Задача P_c : найти $\gamma \in \mathbb{R}$ такое, что существует нетривиальные решения v дифференциального уравнения (18), удовлетворяющие условиям (19).

3. Численный метод

Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$w' = -\rho^{-1}w' + \rho^{-2}w - (k_0^2\epsilon_r - \gamma)v = 0, \quad (20)$$

с начальными условиями

$$w(r_0) = 0, w'(r_0) := A, \quad (21)$$

где A – заданная константа (амплитуда поля), отличная от нуля.

Мы предполагаем, что решение задачи Коши существует, единственно и определено на всем интервале $[r_0, r]$ для данного значения r_0, r и непрерывно зависит от параметра $\gamma > \omega\sqrt{\epsilon_c}$.

Из условия сопряжения на второй границе r , получаем уравнение

$$\Phi(\gamma) \equiv \phi_1(\gamma)w(r-0) + \phi_2(\gamma)w'(r-0), \quad (22)$$

где $\phi(\gamma) = \kappa K_0(\kappa r) + r^{-1}K_1(\kappa r)$, $\phi_2(\gamma) = K_1(\kappa r)$ для задачи P_0 ; а также

$$\begin{aligned} \phi(\gamma) &= \kappa(K_0(\kappa r)I_1(\kappa R) + I_0(\kappa r)K_1(\kappa R)) + \\ &+ r^{-1}(K_0(\kappa r)I_1(\kappa R) - I_0(\kappa r)K_1(\kappa R)), \\ \phi_2(\gamma) &= (K_1(\kappa r)I_1(\kappa R) - I_0(\kappa r)K_1(\kappa R)), \end{aligned}$$

для задачи P_C .

Из формулы (22) следует, что значение $\Phi(\gamma)$ выражается только через значения решения задачи Коши $w(r)$ и $w'(r)$. Предположим, что

$\gamma = \tilde{\gamma}$ таково, что $\Phi(\gamma) = 0$; тогда ясно, что $\tilde{\gamma}$ является решением (постоянной распространения).

Утверждение 1. Пусть отрезок $[\underline{\gamma}, \bar{\gamma}]$ таковы, что $\Phi(\underline{\gamma})\Phi(\bar{\gamma}) < 0$. Тогда существует хотя бы одна постоянная распространения (одно собственное значение) $[\tilde{\gamma} \in \underline{\gamma}, \bar{\gamma}]$.

Набор решений уравнения $\Phi(\gamma) = 0$ определяет спектр собственных волн распространяющихся ТЕ-поляризованных волны. Будем называть $\Phi(\gamma) = 0$ дисперсионным уравнением задачи. Решив численно уравнение $\Phi(\gamma) = 0$ (для разных значений частоты) можно построить графики зависимости (дисперсионные кривые) собственных значений γ на частоте f . Обратите внимание, что значение f связано из циклической частоты ω соотношением $f = 2\pi i\omega$.

На рисунках 1 и 2 представлены расчеты решения дисперсионных уравнений для задач P_0 и P_C соответственно. серыми линиями отмечена область, определяемая условием $k_0^2 \epsilon < \gamma^2 < k_0^2 \max_{[r_0, r]}(\epsilon_r)$; где у рассматриваемой задачи есть решения. Значения параметров, используемых в расчетах указаны в подписях к графикам. Фигуры 1 и 2 показывают, что спектры однослойных закрытых и открытых волноводов (с теми же параметрами), как и следовало ожидать, являются разные. Более того, для выбранной частоты $\omega = 5.5$, у нас разное количество собственных значений.

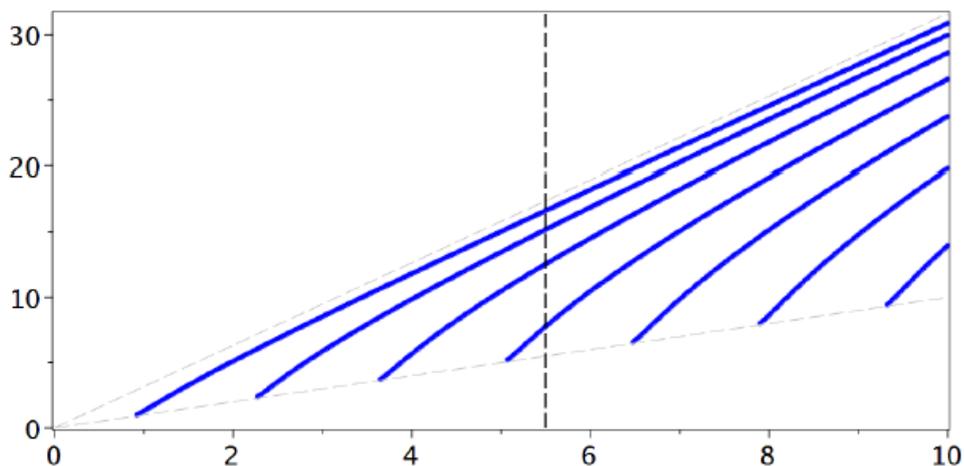


Рис. 1. Задача P_0 : дисперсионные кривые. Значения параметров:
 $A = 1, r_0 = 0.25, r = 1.0, \epsilon_c = 1, \epsilon_r = 9 + \rho$.

Видим, что количество и величина собственных значений Задачи P_C меняются с увеличением толщины внешнего слоя ΔR , по сравнению с собственными значениями задачи P_0 . Мы видим (рис. 3), что уже ко-

гда внешний слой имеет толщину $\Delta R > 0.5$, количество и величина собственных значений Задачи P_0 (синие кривые) и P_C (красные кривые) совпадают.

Можно сделать следующий важный вывод: спектры Задач P_0 и P_C совпадают для достаточно толстых внешние слои.

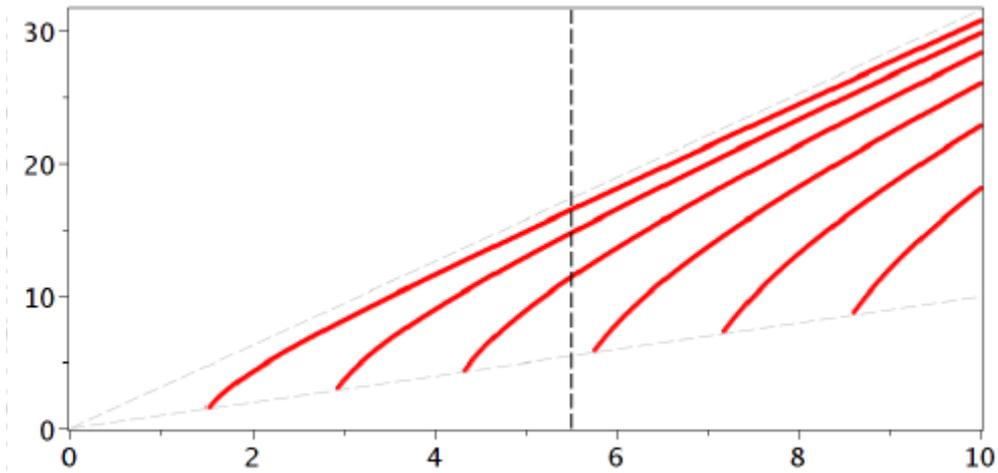


Рис. 2. Задача P_C : дисперсионные кривые. Значения параметров:
 $A = 1, r_0 = 0.25, r = 1.0, \Delta R = 0, \epsilon_c = 1, \epsilon_r = 9 + \rho$.

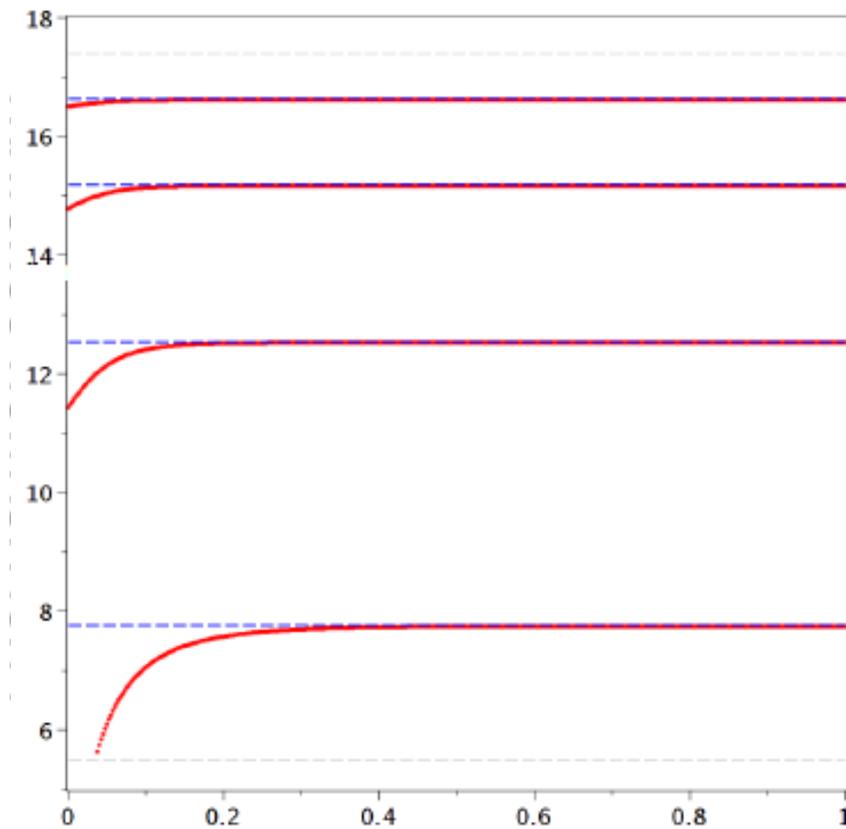


Рис. 3. Сравнение спектров задач P_0 (синие линии) и P_C (красные линии).
 Значения параметров: $A = 1, r_0 = 0.25, r = 1.0, \epsilon_c = 1, \epsilon_r = 9 + \rho$.

Заключение

Сравнение свойств поверхности ТЕ-поляризованных электромагнитные волны в ЗС и двухслойном экранированном диэлектрике волновод, заполненный неоднородной средой, выполнено в результате серии выполненных расчетов с помощью специально построенного численного метода. Полученные численные результаты сравнения подтверждают несколько важных свойства спектров ТЕ-волн, не сообщалось в более ранних исследованиях.

Список литературы

1. Веселов Г. И., Раевский С. Б. Слоистые металлодиэлектрические волноводы. М. : Радио и связь, 1988.
2. Eleonskii P. N., Ogan'es`yants L. G., Silin V. P. Cylindrical Nonlinear Waveguides // Soviet Physics JETP. 1972. Vol. 35. № 1. P. 44–47.
3. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М. : Наука, 1979.
4. Schürmann H. W., Serov V. S., Shestopalov Yu. V. TE-polarized waves guided by a lossless nonlinear three-layer structure // Physical Review. 1998. Vol. 58, № 1. P. 1040–1050.
5. Смирнов Ю. Г. Математические методы исследования задач электродинамики. Пенза : Изд-во ПГУ, 2009.
6. Смирнов Ю. Г. Метод операторных пучков в краевых задачах сопряжения для системы эллиптических уравнений // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27, № 1. С. 140–147.

Разделение перекрывающихся спектральных линий путем дифференцирования и минимизации функционала невязки

Валерий Сергеевич Сизиков¹, Алексей Валерьевич Лавров²

^{1,2}Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия

¹sizikov2000@mail.ru, ²lavrov@itmo.ru

Аннотация. Рассмотрена одна из актуальных задач спектроскопии – разделение (сепарация) близких спектральных линий. Задача решается математическим и компьютерным путем. Выполнена минимизация функционала невязки между измеренным и рассчитанным спектрами. При этом линии-компоненты смоделированы гауссианами и задача сводится к отысканию их параметров. Для минимизации функционала предложена модификация метода координатного спуска с использованием способа сужающихся ограничений. Для сглаживания и дифференцирования зашумленных экспериментальных спектральных данных предложено использовать сплайны. Разработано программное обеспечение на MatLab и выполнена обработка примера спектра из пяти линий. Разработанная методика может быть использована для восстановления тонкой структуры спектров и, тем самым, для повышения разрешающей способности спектрометров.

Ключевые слова: разделение (сепарация) линий спектра, минимизация функционала невязки, измеренный и рассчитанный спектры, гауссианы, метод координатного спуска с ограничениями, сплайны, программное обеспечение, MatLab

Separating overlapped spectral lines via differentiation and minimization of the discrepancy functional

Valeriy S. Sizikov¹, Aleksey V. Lavrov²

^{1,2}ITMO University, Saint Petersburg, Russia

¹sizikov2000@mail.ru, ²lavrov@itmo.ru

Abstract. One of the actual problems of spectroscopy is considered, that is, the separation of close spectral lines. The problem is solved via a mathematical (computer) way, namely, by minimizing a functional of discrepancy between the measured and calculated spectra. In this case, the lines (components) are modeled by Gaussians and the problem is reduced to finding their parameters. To minimize the functional, the coordinate descent method modification with the use of decremental constraints technique is proposed. To smooth and differentiate noisy experimental spectral data, the splines are suggested. The software on MatLab is developed and processing of an example spectrum of five lines is done. The developed technique can be used to restore the fine structure of spectra and, thereby, to increase the resolving power of spectrometers.

Keywords: spectrum lines separation, discrepancy functional minimization, measured and calculated spectra, Gaussians, coordinate descent method with constraints, splines, software, MatLab

Рассмотрим прямую задачу моделирования процесса наложений (перекрытий) спектральных линий [1–5]. Полагаем, что спектр $Z(\lambda)$ состоит из нескольких (N) линий с распределением интенсивности $z_j(\lambda)$, $j = \overline{1, N}$, причем линии могут перекрываться и иметь шум δz :

$$\tilde{Z}(\lambda) = \sum_{j=1}^N z_j(\lambda) + \delta z, \quad a \leq \lambda \leq b. \quad (1)$$

На рис. 1 приведен пример перекрытия нескольких (невидимых) линий.

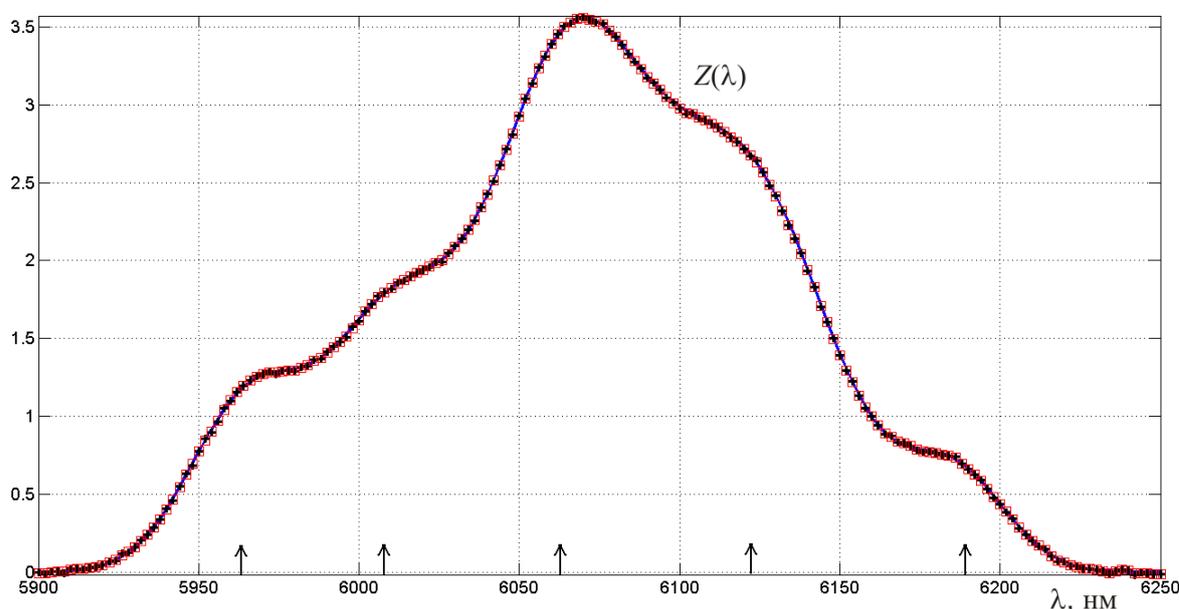


Рис. 1. $Z(\lambda)$ – незашумленный суммарный спектр (непрерывная темносиняя линия); + слабо зашумленный $\tilde{Z}(\lambda)$; □ зашумленный $\tilde{Z}(\lambda)$, сглаженный сплайном; ↑ оценки центральных длин волн $\bar{\lambda}_j$ (см. дальше)

Ставится обратная задача: определить число N линий и их профили $z_j(\lambda)$ по суммарному спектру $\tilde{Z}(\lambda)$.

Данная задача в общем случае имеет множество решений. В работе используется моделирование линий гауссианами (или лоренцианами), подавление шумов δz сглаживающими сплайнами, уточнение профилей линий методом координатного спуска или Нелдера–Мида и ограничения на параметры линий. Это направлено на обеспечение *однозначности решения*.

Используем следующие *ограничения*.

1) Каждую линию моделируем *гауссианой* (адекватная модель):

$$z_j(\lambda) = A_j \exp\left(-\frac{(\lambda - \bar{\lambda}_j)^2}{2\sigma_j^2}\right), \quad (2)$$

где A_j – амплитуда линии, $\bar{\lambda}_j$ – ее центральная длина волны, σ_j – СКО.

2) $0 < A_j \leq Z(\bar{\lambda}_j)$. 3) $a \leq \bar{\lambda}_j \leq b$. 4) $\sigma_j > 0$. 5) $N \geq 1$.

Другими авторами развиты следующие *методы разделения линий*: Фурье-самодеконволюции [2], генетических алгоритмов [6], производных спектра [1, 3–5, 7], симплекс-метод Нелдера–Мида [8], декомпозиции [9] и др. Для оценки числа N и параметров линий используем усовершенствованный *алгоритм дифференцирования спектра* [4, 5, 7]. Производные порядков 1–4 от $z_j(\lambda)$ по λ равны

$$z_j'(\lambda) = -\frac{A_j}{\sigma_j} \exp\left(-\frac{(\lambda - \bar{\lambda}_j)^2}{2\sigma_j^2}\right) \cdot \left(\frac{\lambda - \bar{\lambda}_j}{\sigma_j}\right),$$

$$z_j''(\lambda) = -\frac{A_j}{\sigma_j^2} \exp\left(-\frac{(\lambda - \bar{\lambda}_j)^2}{2\sigma_j^2}\right) \cdot \left(-\frac{(\lambda - \bar{\lambda}_j)^2}{\sigma_j^2} + 1\right),$$

$$z_j'''(\lambda) = \frac{A_j}{\sigma_j^3} \exp\left(-\frac{(\lambda - \bar{\lambda}_j)^2}{2\sigma_j^2}\right) \cdot \left(-\frac{(\lambda - \bar{\lambda}_j)^2}{\sigma_j^2} + 3\right) \cdot \left(\frac{\lambda - \bar{\lambda}_j}{\sigma_j}\right),$$

$$z_j^{IV}(\lambda) = \frac{A_j}{\sigma_j^4} \exp\left(-\frac{(\lambda - \bar{\lambda}_j)^2}{2\sigma_j^2}\right) \cdot \left(\frac{(\lambda - \bar{\lambda}_j)^4}{\sigma_j^4} - 6\frac{(\lambda - \bar{\lambda}_j)^2}{\sigma_j^2} + 3\right).$$

Из данных (оригинальных) формул следует, что

$$z_j'(\bar{\lambda}_j) = 0, \quad z_j''(\bar{\lambda}_j) = -\frac{A_j}{\sigma_j^2} < 0, \quad z_j'''(\bar{\lambda}_j) = 0, \quad z_j^{IV}(\bar{\lambda}_j) = 3\frac{A_j}{\sigma_j^4} > 0, \quad (3)$$

а именно, отрицательный экстремум 2-й производной и положительный экстремум 4-й производной соответствуют максимуму j -й линии, а нулевые значения 1-й и 3-й производных (при $z_j''(\bar{\lambda}_j) < 0$, $z_j^{IV}(\bar{\lambda}_j) > 0$) также указывают на j -ю линию. Это – способ оценки параметра $\bar{\lambda}_j$ каждой линии и числа линий N .

Из выражений $z_j''(\bar{\lambda}_j)$ и $z_j^{IV}(\bar{\lambda}_j)$ в (3) имеем *систему двух уравнений*:

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_j}{\sigma_j^2} &= -z_j''(\bar{\lambda}_j), \\ \frac{A_j}{\sigma_j^4} &= \frac{1}{3} z_j^{IV}(\bar{\lambda}_j). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Решая систему (4), определим параметры A_j и σ_j :

$$A_j = 3 \frac{[z_j''(\bar{\lambda}_j)]^2}{z_j^{IV}(\bar{\lambda}_j)}, \quad \sigma_j = \sqrt{3 \frac{-z_j''(\bar{\lambda}_j)}{z_j^{IV}(\bar{\lambda}_j)}}, \quad j = \overline{1, N}. \quad (5)$$

На рис. 2 представлены производные $Z'(\lambda)$, $Z''(\lambda)$, $Z'''(\lambda)$, $Z^{IV}(\lambda)$ от незашумленного $Z(\lambda)$. Нулевые значения 3-й производной $Z'''(\lambda)$ показывают, что $N = 5$ и оценки $\bar{\lambda}_j$ равны 5960, 6008, 6064, 6124, 6186 (см. стрелки на рис. 1).

Использование отрицательных экстремумов 2-й производной $Z''(\lambda)$ и положительных экстремумов 4-й производной $Z^{IV}(\lambda)$ и формул (5) дает следующие значения A_j : 0.4325, 0.1403, 1.3723, 0.7682, 0.2817 и σ_j : 14.7089, 11.4903, 19.9749, 19.7618, 13.6529. Если использовать найденные значения $\bar{\lambda}_j$, A_j , σ_j и рассчитать суммарный спектр

$$Z(\lambda) = \sum_{j=1}^N z_j(\lambda), \quad a \leq \lambda \leq b, \quad (6)$$

то получим результат, представленный на рис. 3.

Видим, что результат получился неудовлетворительный, а именно, суммарный спектр $Z(\lambda)$ получился существенно иным, чем на рис. 1. Это обусловлено тем, что дифференцировался суммарный спектр $Z(\lambda)$, а нужно дифференцировать непосредственно линии $z_j(\lambda)$ (см. (3)–(5)).

Однако линии недоступны.

Отметим также, что реальный измеренный спектр часто бывает зашумлен и его численное дифференцирование выполняется со значительными погрешностями даже при слабом шуме (см. рис. 1). Можно отфильтровать шумы, например, фильтром Савицкого–Голея [10, с. 193] с помощью m-функции `sgolayfilt.m` в системе MatLab. Но более эффективно аппроксимировать спектр *сглаживающим сплайном* с помощью m-функции `csaps.m` и дифференцировать сплайн. На рис. 4 представлены производные 1–4-го порядков от зашумленного спектра $\tilde{Z}(\lambda)$ (тонкие кривые) и производные от сплайна $\tilde{Z}_s(\lambda)$.

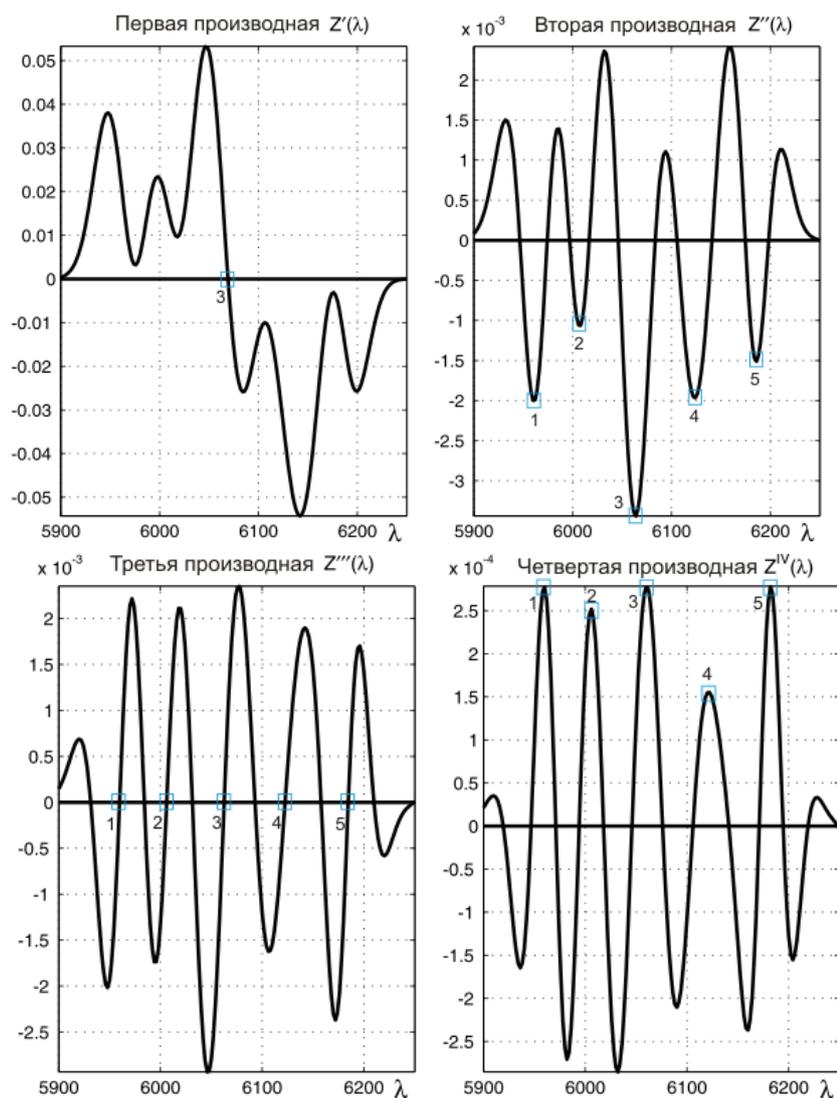


Рис. 2. Производные от незашумленного спектра $Z(\lambda)$, приведенного на рис. 1

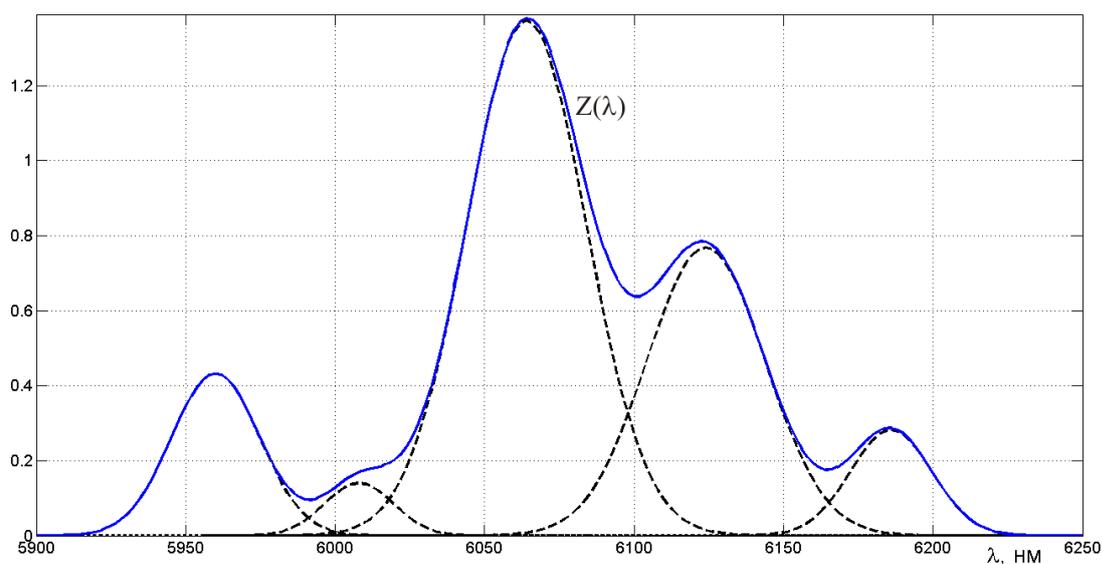


Рис. 3. Профили линий $z_j(\lambda)$ (пунктир) и суммарный спектр $Z(\lambda)$

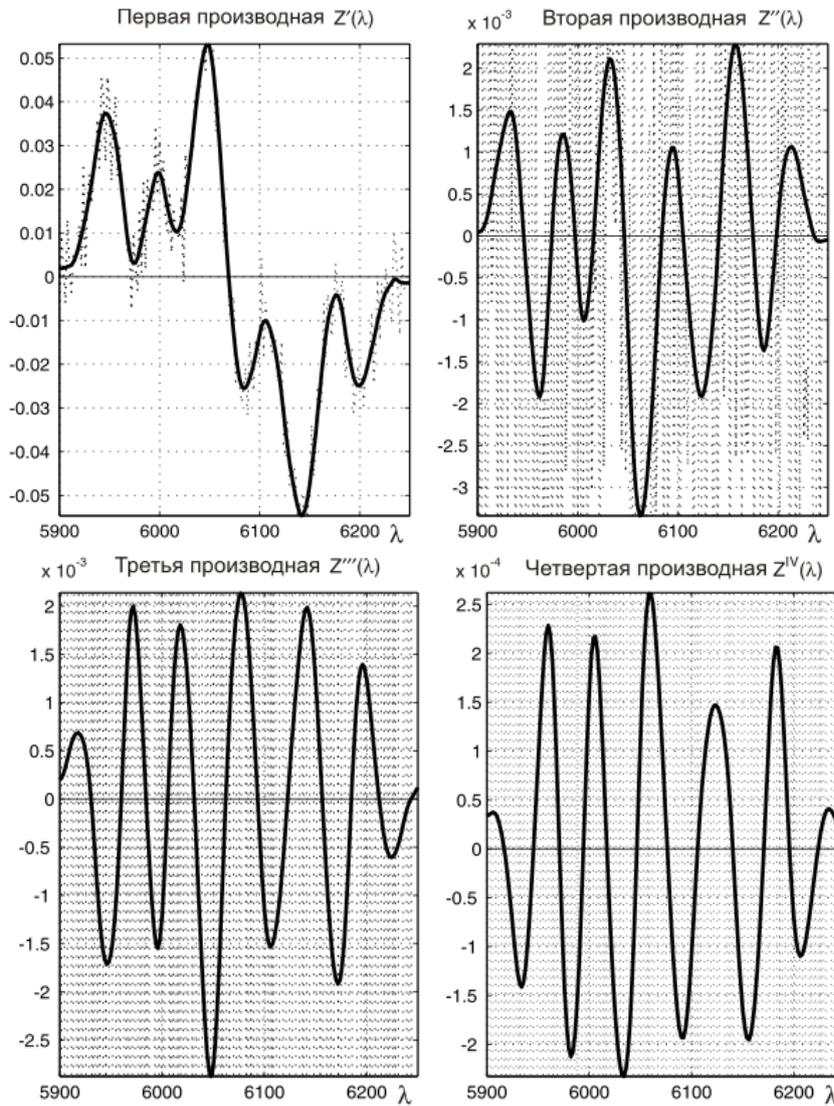


Рис. 4. Производные от зашумленного спектра $\tilde{Z}(\lambda)$ (тонкие пунктирные кривые) и производные от сглаживающего сплайна $\tilde{Z}_s(\lambda)$ (жирные кривые)

Нулевые значения 3-й производной $\tilde{Z}_s'''(\lambda)$ показывают, что $N = 5$ и оценки $\bar{\lambda}_j$ равны 5962, 6006, 6064, 6124, 6186, а значения A_j : 0.5057, 0.1414, 1.4408, 0.7521, 0.2952 и σ_j : 16.2107, 11.8167, 20.7967, 19.7940, 14.6871, т.е. практически такие же, как на рис. 2 и 3.

В прежних наших публикациях [4, 5, 7, 11] предложено уточнять параметры A_j и σ_j с помощью модифицированного метода координатного спуска (КС) или симплекс-метода Нелдера–Мида (НМ). Согласно методу КС, $3N$ параметров гауссиан $z_j(\lambda)$ объединяются в один вектор \mathbf{p} длиной $3N = 15$:

$$\mathbf{p} = [A_1, \bar{\lambda}_1, \sigma_1, \dots, A_N, \bar{\lambda}_N, \sigma_N], \quad (7)$$

параметры p_J , $J = \overline{1, 3N}$, находятся путем минимизации *функционала невязки*:

$$F = \sum_{i=1}^n (\tilde{Z}_i - Z_i)^2, \quad (8)$$

где $\tilde{Z}_i \equiv \tilde{Z}(\lambda_i)$ – измеренные значения суммарного спектра, $Z_i \equiv Z_i(\mathbf{p})$ – рассчитанные значения суммарного спектра, n – число дискретных отсчетов по λ .

Вводятся также *ограничения на параметры p_J* в виде:

$$p_{\min_J} \leq p_J \leq p_{\max_J}, \quad J = \overline{1, 3N}. \quad (9)$$

В предыдущих работах применительно к $N = 2$ и $N = 3$ получено восстановление линий, близкое к точному. В данном случае, когда $N = 5$, методы КС и НМ, использующие оценки (5) в качестве начальных приближений, не дают хорошего восстановления. Поэтому предлагается вместо оценок (5) использовать ограничения типа (9), оценив p_{\min} и p_{\max} по исходному рис. 1. Полагаем:

$$p_{\min} = [0.75, 5945, 13, 1.25, 5990, 16, 2.85, 6045, 19, 2.2, 6100, 22, 0.3, 6166, 11], \quad (10)$$

$$p_{\max} = [1.35, 5985, 23, 1.85, 6030, 26, 3.45, 6085, 29, 2.8, 6140, 32, 0.9, 6206, 21]. \quad (11)$$

Такую оценку нетрудно получить, так как параметры $\bar{\lambda}_j$ оценены надежно.

Используя p_{\min} и p_{\max} , методом КС по разработанной *m-функции CoDesc.m* находим вектор

$$pc = [1.0451, 5965, 17.9588, 1.5475, 6010, 21.0000, 3.1545, 6065, 23.9588, 2.4951, 6120, 26.9588, 0.5975, 6185, 15.9588]. \quad (12)$$

Этот вектор близок к точному решению. На рис. 5 – восстановленные линии $z_j(\lambda)$ и суммарный спектр $Z(\lambda)$ (ср. [9, рис. 1]). Значение функционала невязки $F = 0.013$ (малое значение), число итераций в методе КС равно 420.

Данный пример демонстрирует успешное разделение пяти перекрывающихся спектральных линий.

Решены также примеры с наложением двух, трех и двенадцати линий.

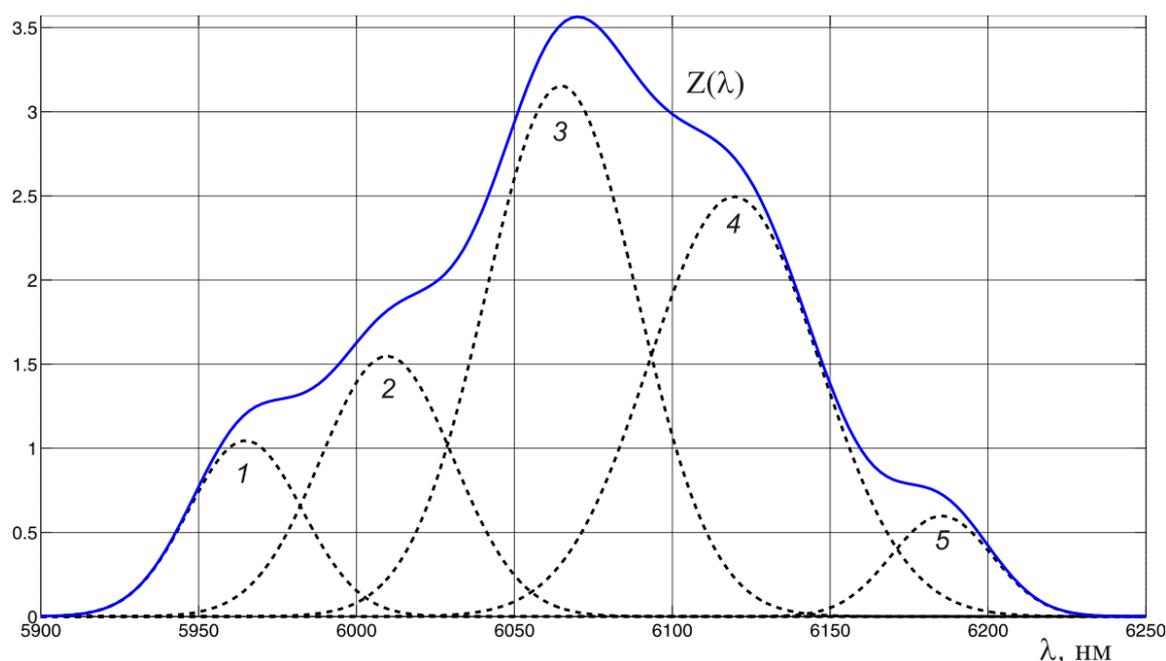


Рис. 5. 1, 2, 3, 4, 5 – профили линий $z_j(\lambda)$, найденные методом КС с использованием ограничений (10), (11), и суммарный спектр $Z(\lambda)$

Список литературы

1. Giese A. T., French C. S. The analysis of overlapping spectral absorption bands by derivative spectrophotometry // *Applied Spectroscopy*. 1955. Vol. 9, № 2. P. 78–96.
2. Kauppinen J. K., Moffatt D. J. [et al.]. Fourier self-deconvolution: a method for resolving intrinsically overlapped bands // *Applied Spectroscopy*. 1981. Vol. 35, № 3. P. 271–276.
3. Манойлов В. В., Заруцкий И. В. Возможности алгоритма сверток с производными для оценки параметров масс-спектров, содержащих наложившиеся пики // *Научное приборостроение*. 2009. Т. 19, № 4. С. 103–108.
4. Сизиков В. С., Лавров А. В. Сепарация непрерывных линий, взаимно перекрывающихся и сглаженных аппаратной функцией // *Оптика и спектроскопия*. 2017. Т. 123, № 5. С. 678–688.
5. Сизиков В. С., Лавров А. В. Исследование погрешностей некоторых методов разделения перекрывающихся спектральных линий в условиях воздействия помех // *Научно-технический вестник ИТМО*. 2017. Т. 17, № 5. С. 879–889.
6. Goldberg D. E. *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*. Addison-Wesley, 1989.
7. Сизиков В. С., Лавров А. В. Сравнение различных методов разделения непрерывных перекрывающихся спектральных линий // *Оптика и спектроскопия*. 2018. Т. 124, № 6. С. 723–731.
8. Nelder J. A., Mead R. A simplex method for function minimization // *The Computer Journal*. 1965. Vol. 7, № 4. P. 308–313.
9. Коваленко А. В., Вовк С. М., Плахтий Е. Г. Метод декомпозиции суммы гауссовых функций, составляющих экспериментальный спектр фото-

люминесценции // Журнал прикладной спектроскопии. 2021. Т. 88, № 2. С. 297–302.

10. Дьяконов В., Абраменкова И. MATLAB. Обработка сигналов и изображений. СПб. : Питер, 2002.

11. Сизиков В. С., Лавров А. В. Современные устойчивые математические и программные методы восстановления искаженных спектров. Обзорная статья // Научно-технический вестник ИТМО. 2018. Т. 18, № 6. С. 911–931.

**Математическое моделирование нелинейных
явлений в графеновых метаповерхностях
в терагерцовом и инфракрасном диапазонах частот**
Александр Михайлович Лерер¹, Галина Степановна Макеева²,
Владимир Владимирович Черепанов³

^{1,3}Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, Россия

²Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹lerer@sfedu.ru, ²rtech@pnzgu.ru, ³vcherepanov@sfedu.ru

Аннотация. Проведено исследование нелинейных явлений в многослойных метаповерхностях из графеновых нанолент с помощью математического моделирования на основе решения нелинейных краевых задач для уравнений Максвелла совместно с моделью нелинейной поверхностной проводимости графена третьего порядка. Показана эффективность умножения частоты многослойными метаповерхностями из графеновых нанолент в ТГц и среднем ИК диапазонах с помощью многослойных подложек (диэлектрических зеркал) и перестройки резонансных рабочих частот в широком диапазоне частот путем изменения химического потенциала без изменения их геометрии и размеров.

Ключевые слова: нелинейная задача дифракции, метод возмущений, метод приближенных граничных условий, поверхностная проводимость графена, нормированная мощность

**Mathematical modeling of nonlinear phenomena in graphene-based
metasurfaces at terahertz and infrared frequencies**

Aleksandr M. Lerer¹, Galina S. Makeeva, Vladimir V. Cherepanov³

^{1,3}Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

²Penza State University, Penza, Russia

¹lerer@sfedu.ru, ²rtech@pnzgu.ru, ³vcherepanov@sfedu.ru

Abstract. A study of nonlinear phenomena in multilayer metasurfaces made of graphene nanoribbons was carried out using mathematical modeling based on the solution of nonlinear boundary value problems for Maxwell's equations together with a model of graphene nonlinear surface conductivity of the third order. The efficiency of frequency multiplication by multilayer graphene nanoribbon metasurfaces in the THz and mid-IR ranges using multilayer substrates (dielectric mirrors) and tuning of resonant operating frequencies in a wide frequency range by changing the chemical potential without changing their geometry and dimensions are shown.

Keywords: nonlinear diffraction problem, perturbation method, method of approximate boundary conditions, graphene surface conductivity. normalized power

Введение

Сильно легированный графен недавно стал привлекательной платформой для плазмоники из-за его уникальных оптоэлектронных свойств, которые приводят к относительно долгоживущим, сильно ограниченным и активно перестраиваемым плазмонным резонансам, которые в основном проявляются в в ТГц и ИК диапазонах частот [1]. Интригующие и необычные физические свойства графена открывают замечательный потенциал для передовых технологических приложений, связанных с фотоникой, особенно в области нелинейной оптики в субволновом масштабе [2]. Сочетание большого ограничения поля и усиления, создаваемого графеновыми плазмонами, сильного нелинейного отклика в этом тонком (толщиной один атом) материале, его необычайной чувствительности к внешним постоянным электрическому и магнитному полям и низкой электронной теплоемкости делают возможным его применение в важных областях нанопотоники и, в частности, в достижении нелинейных эффектов единого порядка на наномасштабе [1, 3, 4]. Кроме того, электростатическое смещение в многослойном графене увеличивается по сравнению с однослойным из-за перераспределения носителей по разным слоям, что расширяет диапазон спектральной перестройки плазмонных структур [5].

Целью данной работы является численное исследование нелинейных взаимодействий электромагнитных волн с многослойными метаповерхностями на основе графеновых наноструктур с помощью математического моделирования на основе решения нелинейных краевых задач для уравнений Максвелла совместно с моделью электронной проводимости графена. Изучаются нелинейные физические явления и эффекты, дифракционные явления, геометрические и размерные эффекты, связанные с разработкой перспективных реконфигурируемых нелинейных устройств на основе многофункциональных графеновых метаповерхностей в ТГц и ИК диапазонах частот.

1. Математическая модель. Численный метод

Математическая модель нелинейного взаимодействия электромагнитных волн с многослойными графеновыми метаповерхностями основана на решении нелинейных краевых задач дифракции для уравнений Максвелла совместно с моделью нелинейной поверхностной проводимости графена.

Для решения задачи нелинейной дифракции используется метод возмущений. Сначала решается линейная задача дифракции электромагнитных волн на многослойных метаповерхностях из графеновых нанолент двумя методами [6]: методом приближенных граничных условий [7] и методом решения объемного интегродифференциального уравнения [8, 9].

Модель поверхностной проводимости графена σ как нелинейной функции напряженности электрического поля \vec{E} имеет вид

$$\sigma = \sigma^{(1)} + \sigma^{(3)} |\vec{E}(x, y, t)|^2, \quad (1)$$

где $\sigma^{(1)}$ - линейная часть проводимости, определяемая по формуле Кубо [10], $\sigma^{(3)}$ - нелинейная проводимость третьего порядка [11]

$$\sigma^{(3)} = -i \frac{3}{32} \frac{e^4 v_F^2}{\omega^3 \hbar^2 \mu_c}, \quad (2)$$

здесь e – заряд электрона, μ_c – химический потенциал (энергия Ферми), $v_F = 10^6$ м/с – скорость Ферми, ω – частота падающей волны, \hbar – приведенная постоянная Планка.

Вычислительный алгоритм разработан в несколько этапов:

- сначала определяются электромагнитные поля в многослойном диэлектрике по методике, описанной в [8];
- выполняются граничные условия на графеновых нанолентах с линейной поверхностной проводимостью $\sigma^{(1)}$ при $\sigma^{(3)} = 0$ в (1);
- в результате получается система парных интегральных уравнений (СПИУ) относительно неизвестных поверхностных плотностей тока на нанолентах. СПИУ близка к ПИУ [7] для случая одной ленты графена в элементарной ячейке однослойной метаповерхности.
- СПИУ решается методом Галеркина [7];
- электромагнитные поля (на лентах и в дальней зоне излучения) определяются путем решения СПИУ;
- полученное решение используется для нахождения нелинейных поверхностных токов на нанолентах и моделирования нелинейных эффектов в многослойных графеновых метаповерхностях.

2. Результаты численного моделирования

Многослойные метаповерхности (вставка на рис. 1) состоят из нескольких двумерных периодических решеток ($d_x = d_y$ – периодичность по осям x, y) графеновых нанолент конечной длины (ширина w , длина l), расположенных на диэлектрических слоях (SiO_2) с показателем преломления $n = 1,45$, толщиной $d_1 = d_2$ и d_3 на полубесконечной подложке $n = 1,77$. Параметры графена: $T = 300$ К, $\tau = 1$ пс, $\mu_c = 0,3$ эВ.

Результаты численного моделирования эффекта умножения ТГц частоты : нормированная мощность T_3 волны третьей гармоники, излучаемой в прямом направлении, и коэффициент поглощения P в зависимости от частоты падающей ТЕМ-волны показаны на рис. 1 для волн s-, p- поляризации (рис. 1а) и для решеток с различным числом слоев графеновых нанолент (рис. 1б). Значения T_3 рассчитываются путем нормировки на плотность мощности падающей волны P_0 .

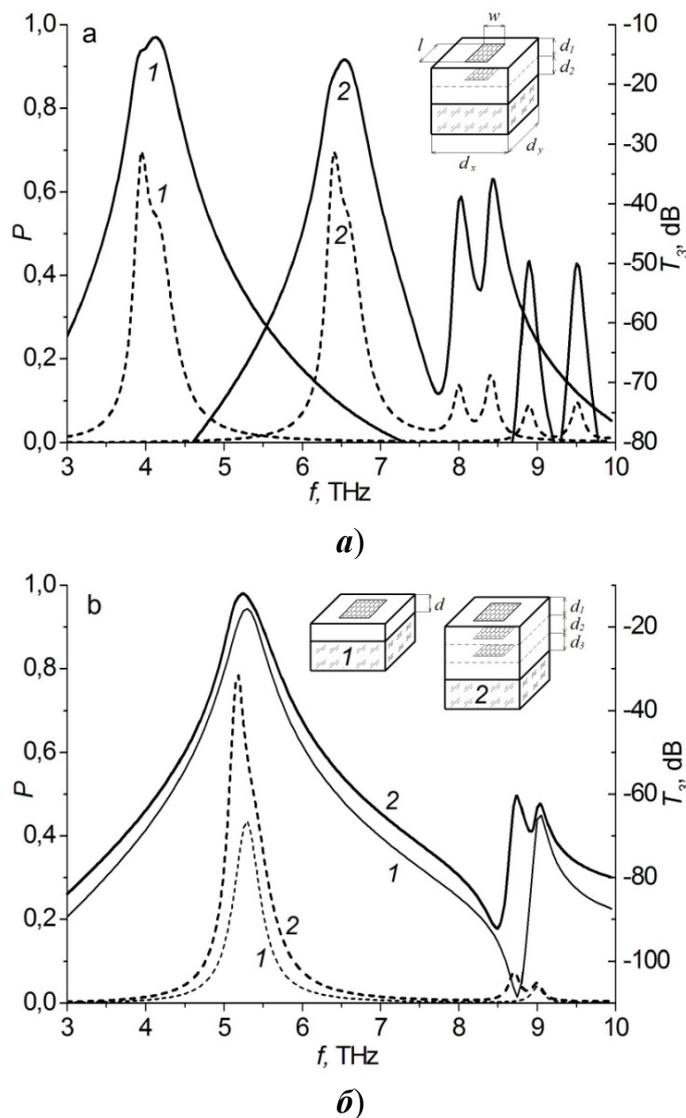


Рис. 1. Эффективность умножения частоты (сплошные линии) многослойными метаповерхностями из квадратных графеновых нанолент и линейный спектр поглощения P (пунктирные): а) для 2-слойной решетки графеновых нанолент (вставка): кривые 1 – s-поляризация, $d_1 = 9 \mu\text{m}$, $d_2 = 4 \mu\text{m}$; кривые 2 – p- поляризация, $d_1 = 5 \mu\text{m}$, $d_2 = 3 \mu\text{m}$; $w_1 = 1.4 \mu\text{m}$, $l_1 = 2.5 \mu\text{m}$, $w_{2,3} = 1.1 \mu\text{m}$, $l_{2,3} = 2.1 \mu\text{m}$; б) для решеток с различным числом слоев графеновых нанолент: кривые 1- для 1-слойной – $w_1 = l_1 = 1.9 \mu\text{m}$, $d = 11 \mu\text{m}$; кривые 2 – для 3-слойной $w_1 = l_1 = 1.9 \mu\text{m}$, $w_{2,3} = l_{2,3} = 1.5 \mu\text{m}$, $d_1 = d_2 = 4 \mu\text{m}$, $d_3 = 2 \mu\text{m}$; $d_x = d_y = 3.5 \mu\text{m}$. $\mu_c = 0.3 \text{ eV}$, $P_0 = 10^{-3} \text{ mW / mm}^2$

Эффективность умножения частоты увеличивается на несколько порядков, когда частота падающей волны близка к резонансным частотам сильно локализованных мод поверхностных плазмон–поляритонов (ППП) (рис. 1а), что в сочетании с сильной нелинейностью графена позволяет значительно увеличить напряженность электрического поля.

Максимумы коэффициента поглощения P на рис. 1а соответствуют резонансам, определяемым модами ППП в графеновых нанолентах конечной длины, и зависят от поляризации падающей волны. Для s-

поляризации первая резонансная частота определяется основной модой ППП (резонанс электрического тока вдоль широкой стороны нанолент). Для р-поляризации это резонанс тока вдоль узкой стороны нанолент, при этом резонансная частота выше, чем для s-поляризации (рис. 1а). Наблюдаются несколько (две) резонансных частот ближайших высших мод ППП (рис. 1а).

На рис. 1б показаны результаты численного моделирования эффекта умножения ТГц частоты в многослойных метаповерхностях с разным числом слоев графеновых нанолент. При увеличении числа слоев решеток эффективность нелинейного взаимодействия может быть значительно увеличена по сравнению с однослойной структурой (рис. 1б).

По мере уменьшения размеров графеновых нанолент и уменьшения периодичности решетки резонансная частота ППП и, следовательно, максимум нормированной мощности ТЗ волны третьей гармоники смещаются в сторону более высоких частот ТГц и частот ИК диапазона (рис. 2, 3).

На рис. 2а показана эффективность умножения частоты в многослойных метаповерхностях с использованием нескольких слоев решеток графеновых нанолент в среднем ИК диапазоне.

На рис. 2б показан режим умножения частоты в многослойной метаповерхности из графеновых нанолент при различных значениях химического потенциала в среднем ИК диапазоне. При уменьшении значения химического потенциала резонансная частота ППП уменьшается, при этом эффективность умножения частоты значительно увеличивается. Показана возможность перестройки резонансных рабочих частот в широком диапазоне частот (рис. 2б) реконфигурируемых умножителей частоты ИК диапазона путем изменения химического потенциала без изменения их геометрии и размеров.

Еще одна возможность улучшения нелинейных эффектов в графеновых метаповерхностях в среднем ИК диапазоне реализуется с помощью многослойных подложек (диэлектрических зеркал) и продемонстрирована правильным выбором слоистости подложки, толщины диэлектрических слоев и их диэлектрической проницаемости (рис. 3 а, б). Нормированная мощность ТЗ в среднем ИК диапазоне возрастает с увеличением числа слоев диэлектрического зеркала (рис. 3 а, б).

Результаты расчетов нормированной мощности волны третьей гармоники, излучаемой в прямом ТЗ (прохождение) и обратном RЗ (отражение) направлениях (нелинейный режим работы) и коэффициентов прохождения Т, отражения R, поглощения Р (линейный режим) на резонансных частотах в ТГц и среднем ИК-диапазонах в зависимости от размеров квадратных и прямоугольных графеновых нанолент многослойных метаповерхностей показаны на рис. 4.

Каждому размеру ленты (рис. 4) соответствует собственная резонансная частота основной моды ППП f_{SPR} и четвертьволновая толщина

диэлектрического слоя. По мере увеличения ширины наноленты w резонансные частоты f_{SPP} уменьшаются (символы на вставках рис. 4). Это изменение аппроксимируется функцией $f_{SPP} = k / \sqrt{w}$, где коэффициент k определяется для конкретного типа метаповерхности [12].

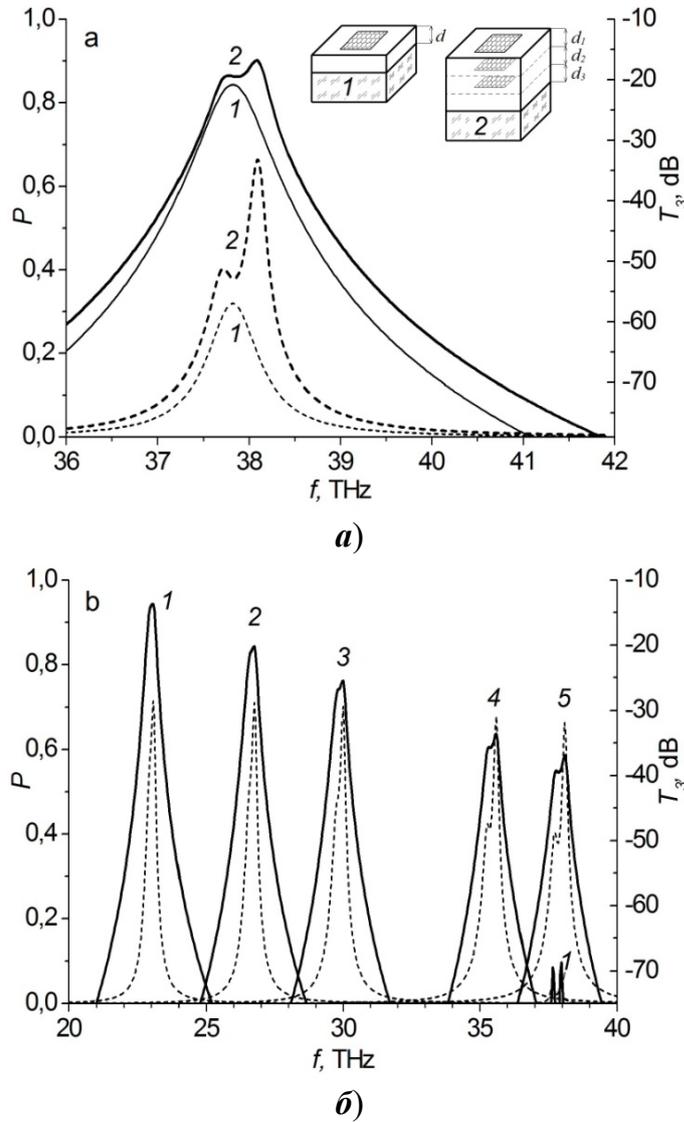


Рис. 2. **а** – Эффективность умножения частоты (сплошные линии) многослойными метаповерхностями из квадратных графеновых нанолент в среднем ИК диапазоне и линейный спектр поглощения P (пунктирные): для решеток с различным числом слоев графеновых нанолент (вставка): $d_x = d_y = 200$ nm; кривые 1- для 1-слойной – $w_1 = l_1 = 100$ nm, $d = 1.4$ μ m; 2 – 3-слойной – $w_1 = l_1 = 100$ nm, $w_{2,3} = l_{2,3} = 75$ nm, $d_1 = d_2 = d_3 = 1.4$ μ m; $\mu_c = 0.8$ eV, $P_0 = 10^{-7}$ mW/mm²; **б** – управляемость эффекта умножения частоты (3-слойная решетка) при изменении значения химического потенциала: кривые 1 – $\mu_c = 0.3$ eV, $d_1 = d_2 = d_3 = 2.2$ μ m; 2 – $\mu_c = 0.4$ eV, $d_1 = d_2 = d_3 = 1.9$ μ m; 3 – $\mu_c = 0.5$ eV, $d_1 = d_2 = d_3 = 1.7$ μ m; 4 – $\mu_c = 0.7$ eV, $d_1 = d_2 = d_3 = 1.5$ μ m; 5 – $\mu_c = 0.8$ eV, $d_1 = d_2 = d_3 = 1.4$ μ m; $d_x = d_y = 0.2$ μ m. $P_0 = 10^{-8}$ mW / mm²

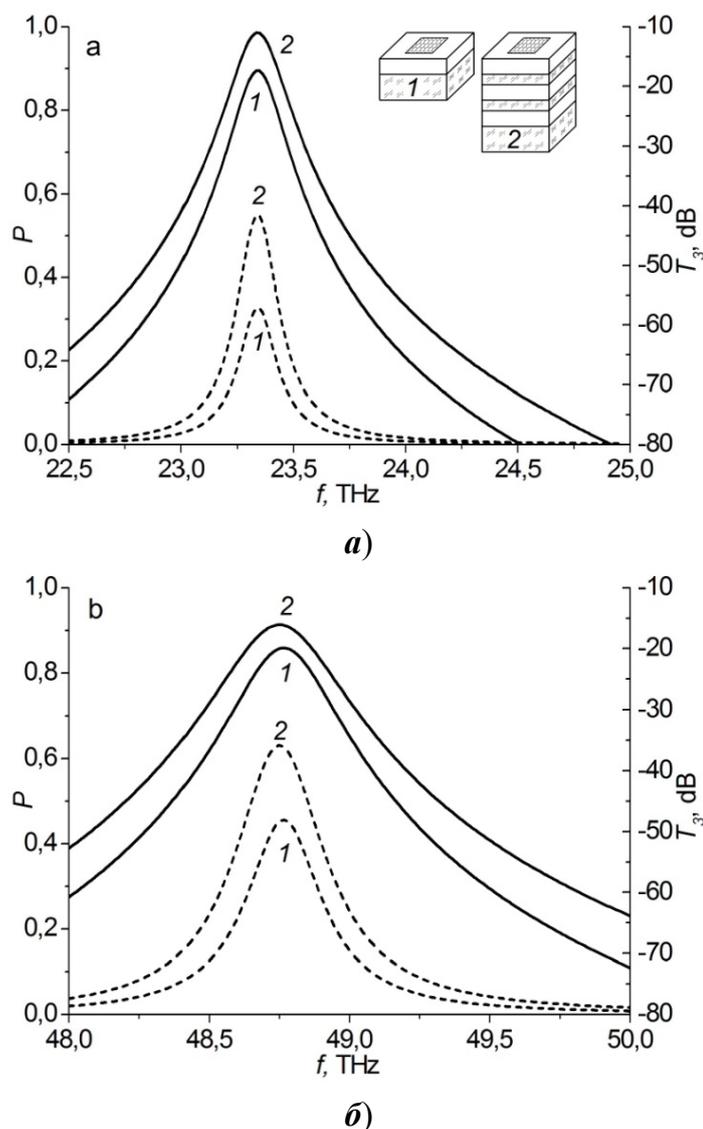


Рис. 3. Эффективность умножения частоты в многослойных метаповерхностях с использованием многослойных подложек (диэлектрических зеркал):

a – в дальнем ИК-диапазоне ($w = l = 100 \text{ nm}$, $d (n=1.45) = 2.2 \text{ }\mu\text{m}$, $d (n=1.77) = 1.8 \text{ }\mu\text{m}$, $d_x = d_y = 400 \text{ nm}$, $\mu_c = 0.3 \text{ eV}$, $P_0 = 10^{-7} \text{ mW/mm}^2$);
b – среднем ИК-диапазоне ($w = l = 20 \text{ nm}$, $d (n=1.45) = 1 \text{ }\mu\text{m}$, $d (n=1.77) = 0.85 \text{ }\mu\text{m}$, $d_x = d_y = 400 \text{ nm}$, $\mu_c = 0.3 \text{ eV}$, $P_0 = 10^{-11} \text{ mW/mm}^2$).

Сплошные линии – нормированная мощность волны третьей гармоники T_3 ; пунктирные - линейный спектр поглощения P . Кривые 1- метаповерхность с диэлектрическим зеркалом, 2 - без диэлектрического зеркала

На рис. 4 представлены области максимумов нормированной мощности T_3 и коэффициента поглощения P . Для метаповерхностей с квадратными нанолентами (рис. 4а) нормированная мощность T_3 максимальна при значениях $w \sim 0,2 \dots 0,5 \text{ мкм}$, а поглощение P максимально при $w \sim 0,25 \dots 0,7 \text{ мкм}$. Для метаповерхностей с прямоугольными нанолентами (рис. 4б) область максимума T_3 при $w \sim 0,3 \dots 0,5 \text{ мкм}$, максимума поглощения P при $w \sim 0,2 \dots 0,5 \text{ мкм}$. Высокий уровень нормированной мощности T_3 волны третьей гармоники может быть получен при

достаточно малых значениях ширины w нанолент по отношению к периодичности решетки d_x из-за увеличения плотности тока на графеновых нанолентах. Проверено, что при увеличении периодичности решетки d_x , d_y при $w/d_x = w/d_y = \text{const}$) максимумы поглощения P и нормированной мощности T_3 находятся в тех же областях, что и на рис. 4. Следовательно, максимальная эффективность умножения частоты наблюдается (для основной моды ППП) при соотношении геометрических размеров нанолент и решетки порядка $w/d_x = w/d_y \sim 0,3$.

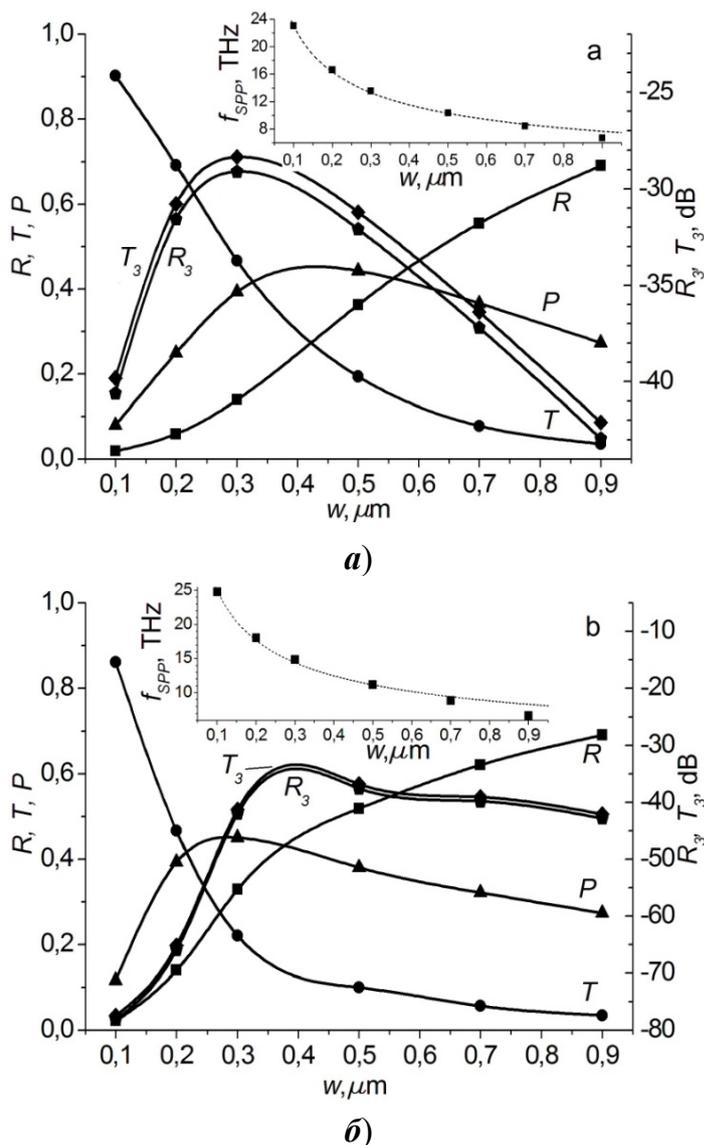


Рис. 4. Зависимости нормированной мощности волны третьей гармоники, излучаемой в прямом T_3 (прохождение) и обратном R_3 (отражение) направлениях (нелинейный режим работы) и коэффициентов прохождения T , отражения R , поглощения P (линейный режим) на резонансных частотах в ТГц и среднем ИК-диапазоне от размеров графеновых лент многослойных метаповерхностей (№1 вставка рис. 3а): **а)** для квадратной геометрии ($w = l$); **б)** для прямоугольной геометрии ($w \neq l$, $l = 0.9 \mu\text{m}$, p - поляризация). $d_x = d_y = 1 \mu\text{m}$, $\mu_c = 0.3 \text{ eV}$, $P_0 = 10^{-6} \text{ mW/mm}^2$

Таким образом, увеличивая число слоев (рис. 1а, 2а), а также изменяя плотность упаковки и геометрические размеры графеновых лент (рис. 4), можно контролировать резонансные рабочие частоты и эффективностью ТГц, ИК умножителей частоты на основе многослойных графеновых метаповерхностей.

Заключение

С помощью разработанного численно-аналитического метода продемонстрирована возможность реализации эффекта умножения частоты в многослойных графеновых метаповерхностях в ТГц и среднем ИК диапазонах. Благодаря сильной оптической нелинейности графена и резонансам ППП многослойные метаповерхности из графеновых нанолент демонстрируют увеличение на три порядка сигнала третьей гармоники по сравнению с однослойными структурами.

Показано, что многослойные графеновые метаповерхности предоставляют возможности для улучшения нелинейных оптических процессов на наномасштабе за счет корректного выбора параметров, в том числе решеток и диэлектрических слоев подложек, их толщины и диэлектрической проницаемости. Изменяя геометрические размеры графеновых нанолент, периодичность и плотность упаковки решеток, можно реализовать эффективное умножение частоты в широком спектральном диапазоне - ТГц и среднем ИК диапазонах волн.

Управляемость многослойных графеновых метаповерхностей с помощью изменения химического потенциала (приложения внешнего электрического поля) позволит создать в будущем реконфигурируемые ТГц и ИК плазмонные устройства с высокими оптическими характеристиками и широкими возможностями перестройки [4].

Нелинейные эффекты в многослойных метаповерхностях из графеновых нанолент могут быть использованы для различных приложений, включая ТГц и ИК умножители и генераторы, нелинейные ИК модуляторы, мультиплексоры, ИК-логику и сенсорные устройства [1].

Список литературы

1. Cox J. D., García De Abajo F. J. Nonlinear Graphene Nanoplasmonics // *Accounts of Chemical Research*. 2019. Vol. 52, № 9. P. 2536–2547.
2. Tan T., Jiang X. [et al.]. 2D Material Optoelectronics for Information Functional Device Applications: Status and Challenges // *Advanced Science*. 2020. № 7. P. 2000058.
3. D. Kundys, Marshall O.P. [et al.]. Nonlinear Light Mixing by Graphene Plasmons // *Nano Letters*. 2018. Vol. 18, № 1. P. 282–287.
4. Li J., Zhang T., Chen L. High-Efficiency Plasmonic Third-Harmonic Generation with Graphene on a Silicon Diffractive Grating in Mid-infrared Region // *Nanoscale Research Letters*. 2018. Vol. 13, № 1. P. 338.

5. Rodrigo D., Tittl A. [et al.]. Double-layer graphene for enhanced tunable infrared plasmonics // *Light: Science and Applications*. 2017. Vol. 6, № 6. P. e16277.

6. Лерер А. М., Макеева Г. С. Поляризационные эффекты и резонансное поглощение при дифракции терагерцовых волн на графеновых метаповерхностях // *Оптика и спектроскопия*. 2018. Т. 125, вып. 6. С. 838–843.

7. Лерер А. М., Иванова И. Н. Применение приближенных граничных условий для расчета планарных двумерно-периодических наноплазмонных структур // *Радиоэлектроника*. 2016. Т. 61, № 5. С. 435.

8. Лерер А. М. Теоретическое исследование двумерно периодических наноплазмонных структур // *Радиоэлектроника*. 2012. Т. 57, № 11. С. 1160.

9. Лерер А. М., Иванова И. Н. [и др.]. Металлодиэлектрические резонансно поглощающие дифракционные решетки оптического диапазона // *Физические основы приборостроения*. 2016. Т. 5, № 5 (22). С. 90–98.

10. Hanson G. W. Dyadic Green's functions and guided surface waves for a surface conductivity model of graphene // *Journal of Applied Physics*. 2008. Vol. 103, № 6. P. 064302.

11. Mikhailov S. A. Non-linear electromagnetic response of graphene // *Europhysics Letters*. 2007. Vol. 79, № 2. P. 27002.

12. Christensen J., Manjavacas A. [et al.]. Graphene plasmon waveguiding and hybridization in individual and paired nanoribbons // *ACS Nano*. 2012. Vol. 6, № 1. P. 431–440.

**Аналитическое исследование спектра
комплексных волн плоского волновода**

Михаил Николаевич Судаков¹, Максим Олегович Снегур²

Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия

¹sudakovmihail@rambler.ru, ²snegur.max15@gmail.com

Аннотация. Рассматривается задача о нормальных ТЕ-поляризованных волнах, которая, в свою очередь, сводится к задаче на собственные значения для компоненты электромагнитного поля в пространстве Соболева. Формулируется определение решения с помощью вариационного соотношения. Приведены важные теоремы и леммы.

Ключевые слова: волна, поле, оператор, задача, уравнение

Благодарности: статья подготовлена под научным руководством к.ф.-м.н. Е. Ю. Смолькина.

Финансирование: исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-31-70010.

**Analytical study of the spectrum
of complex waves of a plane waveguide**

Mikhail N. Sudakov¹, Maksim O. Snegur²

Penza State University, Penza, Russia

¹sudakovmihail@rambler.ru, ²snegur.max15@gmail.com

Abstract. The problem consider of normal TE-polarized waves, which, in turn, reduces to an eigenvalue problem for the electromagnetic field component in the Sobolev space. The definition of the solution is formulated using the variational relation. Important theorems and lemmas are presented.

Keywords: wave, field, operator, problem, equation

Acknowledgments: the article was prepared under the scientific supervision of Ph. D. E. Yu. Smolkin. The reported study was funded by RFBR according to the research project № 20-31-70010.

1. Постановка задачи

Рассмотрим трехмерное пространство \mathbb{R}^3 , с декартовой системой координат $Oxyz$ и заполненное изотропной средой без источников, имеющей диэлектрическую проницаемость $\varepsilon_c \varepsilon_0 = const$ и магнитную проницаемость $\mu_0 = const$, где ε_0 и μ_0 – диэлектрическая и магнитная проницаемости вакуума. Мы рассматриваем электромагнитные волны, распространяющиеся через слой:

$$\Sigma := \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq h\}.$$

Граница $x = h$ – проекция диэлектрической поверхности. Граница $x = 0$ – проекция идеально проводящего экрана.

Мы предполагаем, что поля гармонически зависят от времени как $\exp(-i\omega t)$, где $\omega > 0$ – круговая частота.

Определение ТЕ-поляризованных волн сводится к нахождению нетривиальных решений системы уравнений Максвелла зависящих от координаты z , вдоль которой структура регулярна, в виде $e^{i\gamma z}$,

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{H} = -i\omega \varepsilon_0 \tilde{\varepsilon} \mathbf{E}, \\ \nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mu_0 \mathbf{H}, \end{cases} \quad (1)$$

$$\mathbf{E} = (0, E_y(x)e^{i\gamma z}, 0), \quad \mathbf{H} = (H_x(x)e^{i\gamma z}, 0, H_z(x)e^{i\gamma z})$$

с граничным условием для тангенциальной составляющей электрического поля на идеально проводящем экране:

$$E_y|_{x=0} = 0, \quad (2)$$

и условия непрерывности тангенциальной составляющей электрического и магнитного поля на поверхности разрыва диэлектрической проницаемости ($x = h$):

$$[E_y]|_{x=h} = 0, [H_z]|_{x=h} = 0, \quad (3)$$

где $[f]|_{x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$. Мы не будем фиксировать условие излучения на бесконечности, потому что мы хотим рассмотреть проблему для произвольных γ .

Считаем, что относительная диэлектрическая проницаемость во всем пространстве имеет вид:

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{cases} \varepsilon, & 0 \leq x \leq h, \\ \varepsilon_c, & x > h. \end{cases} \quad (4)$$

Мы так же предполагаем, что $\varepsilon(x) > \varepsilon_c$ является непрерывной функцией на отрезке $[0, h]$, т.е., $\varepsilon(x) \in C[0, h]$ и $Im \varepsilon(x) = 0$.

Задача о ТЕ-поляризованных волнах представляет собой задачу на собственные значения для уравнений Максвелла со спектральным параметром γ , который является постоянной распространения волноводной структуры.

Поле нормальной волны в волноводе можно представить с помощью одной скалярной функции:

$$u := E_y(x). \quad (5)$$

Таким образом, задача сводится к нахождению тангенциальной составляющей электрического поля u .

Принята следующая классификация волн [1–4]. По параметру γ – постоянной распространения:

Определение 1. Распространяющаяся волна характеризуется действительным параметром γ .

Определение 2. Затухающая волна характеризуется чисто мнимым параметром γ .

Определение 3. Комплексная волна характеризуется комплексным параметром γ таким, что $Re \gamma * Im \gamma \neq 0$.

По условию на бесконечности:

Определение 4. Поверхностная волна удовлетворяет условию $u(x) \rightarrow 0$,

$$x \rightarrow \infty.$$

Определение 5. Вытекающая волна удовлетворяет условию $u(x) \rightarrow \infty$, $x \rightarrow \infty$.

Замечание 1. Постоянная распространения γ характеризует поведение волны (распространяющаяся, затухающая, или комплексная) в z -направлении. Классификация волн поверхностных или вытекающих зависит от поведения в x -направлении.

Мы имеем следующую задачу на собственные значения для касательной компоненты электрического поля u : найти $\gamma \in \mathbb{C}$ такие, что существуют нетривиальные решения дифференциального уравнения:

$$u'' + (\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \tilde{\epsilon} - \gamma^2) u = 0 \quad (6)$$

удовлетворяющие граничным условиям:

$$u|_{x=0} = 0, \quad (7)$$

и условиям сопряжения:

$$[u]|_{x=h} = 0, [u']|_{x=h} = 0. \quad (8)$$

При $x > h$, мы имеем $\tilde{\epsilon} = \epsilon_c$; то из (6) получаем уравнение:

$$u'' - \lambda^2 u = 0. \quad (9)$$

Выберем решение этого уравнения в виде:

$$u(x; \lambda) = e^{(h-x)\lambda}, x > h, \quad (10)$$

где $\lambda^2 = \gamma^2 - \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_c$ и λ – новый (комплексный) спектральный параметр. Если $Re \lambda > 0$ мы имеем поверхностную волну. Если $Re \lambda < 0$ мы имеем вытекающую волну.

При $0 < x < h$, мы имеем $\tilde{\epsilon} = \epsilon(x)$; тогда из (6) получаем уравнение:

$$\mathcal{L}u := u'' + (\epsilon^2 - \lambda^2)u = 0, \quad (11)$$

где

$$\epsilon^2(x; \omega) = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 (\epsilon(x) - \epsilon_c). \quad (12)$$

Определение 6. $\lambda \in \mathbb{C}$ называется характеристическим числом задачи, если существует нетривиальное решение u уравнения (11) при $0 < x < h$, удовлетворяющее (10) при $x > h$, граничным условиям (7) и условиям сопряжения (8).

2. Соболевские пространства и вариационная связь

Мы найдем решения u в пространстве Соболева $H_0^1(0, h)$, с внутренним результатом и нормой

$$(f, g)_1 = \int_0^h f' g' d\rho, \quad f_1^2 = (f, f)_1 = \int_0^h |f'|^2 d\rho$$

Приведем вариационную постановку рассматриваемой задачи. Умножим уравнение (11) на произвольную пробную $v \in H_0^1(0, h)$ и применим формулу Грина:

$$\int_0^h \bar{v} \mathcal{L}u d\rho = u'(h) \bar{v}(h) - \int_0^h u' \bar{v}' d\rho + \int_0^h \epsilon^2 u \bar{v} d\rho - \lambda^2 \int_0^h u \bar{v} d\rho = 0.$$

Используя (10), выразим значения производных при $x = h$ из соотношений (8) следующим образом:

$$u'(h) = -\lambda u(h). \quad (14)$$

Тогда, с учетом (13) и (14), получаем

$$\lambda^2 \int_0^h u \bar{v} d\rho + \lambda u(h) \bar{v}(h) + \int_0^h u' \bar{v}' d\rho - \int_0^h \epsilon^2 u \bar{v} d\rho = 0. \quad (15)$$

Интегралы, входящие в (15), можно рассматривать как полуторалинейные формы над полем \mathbb{C} , определенным в пространстве H_0^1 , и в зависимости от аргументов u и v . Эти формы t определяют некоторые ограниченные линейные операторы $T: H_0^1 \rightarrow H_0^1$

$$t(u, v) = (Tu, v), \forall v \in H_0^1, \quad (16)$$

при условии, что сами формы ограничены,

$$|t(u, v)| \leq Cuv.$$

Линейность следует из линейности формы по первому аргументу, а непрерывность – из оценок

$$Tu^2 = t(u, Tu) \leq CuTu.$$

Рассмотрим следующие полуторалинейные формы и соответствующие операторы:

$$k(u, v) := \int_o^h u \bar{v} d\rho = (Ku, v), \forall v \in H_0^1,$$

$$\tilde{k}(u, v) := \int_o^h \varepsilon^2 u \bar{v} d\rho = (\tilde{K}u, v), \forall v \in H_0^1,$$

$$a(u, v) := \int_o^h u' \bar{v}' d\rho = (Iu, v), \forall v \in H_0^1,$$

$$s(u, v) = u(h) \bar{v}(h) = (Su, v), \forall v \in H_0^1,$$

Теперь вариационную задачу (15) можно записать в операторной форме

$$(N(\lambda)u, v) = 0, \forall v \in H_0^1$$

или, что то же самое,

$$N(\lambda)u := (\lambda^2 K + \lambda S + I - \tilde{K})u = 0. \quad (17)$$

Уравнение (17) является операторной формой вариационного соотношения (15).

3. Свойства операторного пучка

Мы свели задачу о поверхностных ТЕ-поляризованных волнах к изучению спектральных свойств операторного пучка N . В связи с этим рассмотрим свойства операторов, введенных в предыдущем разделе.

Лемма 1. Ограниченные операторы $K, \tilde{K} : H_0^1 \rightarrow H_0^1$ компактны и $K > 0, \tilde{K} > 0$. Собственные значения и собственные функции оператора K равны

$$\lambda_n(K) = \left(\pi^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 / h^2 \right)^{-1}, u_n(x) = \sin \frac{\pi \left(n + \frac{1}{2} \right) x}{h} \quad (n \geq 0).$$

Асимптотика собственных значений оператора K равна

$$\lambda_n(K) \sim \frac{h^2}{\pi^2 n^2}, n \rightarrow \infty.$$

Лемма 2. Оператор $S: H_0^1 \rightarrow H_0^1$ компактный и $\dim \operatorname{Im} S$. Оператор $S: H_0^1 \rightarrow H_0^1$ неотрицательный. Существует только одно ненулевое собственное значение $\lambda_1^*(S) = h$ с соответствующей собственной функцией $u_1^*(x) = x$.

Лемма 3. Существует $\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}$ такое, что оператор $N(\tilde{\lambda})$ непрерывно обратим, т.е. резольвентное множество

$$\rho(N) := \left\{ \lambda : \exists N^{-1}(\lambda) : H_0^1 \rightarrow H_0^1 \right\}$$

оператор-функции $N(\tilde{\lambda})$ не пусто; $\rho(N) \neq \emptyset$.

И получим следующие теоремы, опираясь на приведенные выше леммы.

Теорема 1. Оператор-функция $N(\lambda): H_0^1 \rightarrow H_0^1$ является ограниченной, голоморфной и фредгольмовой в области \mathbb{C} .

Теорема 2. Спектр оператор-функции $N(\lambda): H_0^1 \rightarrow H_0^1$ является дискретным в \mathbb{C} , т.е. имеет конечное число характеристических точек конечной алгебраической кратности в любом компакте $K_0 \subset \mathbb{C}$.

Список литературы

1. Като Т. Теория для возмущений линейных операторов М. : Мир, 1972.
2. Адамс Р. А. Пространства Соболева. Новосибирск, 2009.
3. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М. : Наука, 1965.

Аналитическое исследование задачи об электромагнитных колебаниях открытых неоднородных резонаторов

Юлия Александровна Петрова

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

petrova11999@rambler.ru

Аннотация. Аналитически исследован диэлектрический резонатор, выполненный в форме радиально-трехслойного шара. Решается система уравнений Максвелла в случае пространства с диэлектрическим шаром, которая сводится к решению скалярного уравнения для так называемых потенциалов Дебая. Получено дисперсионное уравнение, справедливое при произвольных размерах и проницаемостях слоев резонатора.

Ключевые слова: трехслойный шаровой резонатор, уравнения Максвелла, электромагнитные колебания, потенциалы Дебая

Финансирование: работа поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований № 19-31-51004.

Analytical problem research of electromagnetic oscillations of open nonuniform resonators

Yuliya A. Petrova

Penza State University, Penza, Russia

petrova11999@rambler.ru

Abstract. A quasi-optical dielectric resonator designed as a triple layered ball is investigated both analitically. The system of Maxwell's equations is solved in the case of a space with a dielectric ball, which reduces to the solution of the scalar equation for the so-called Debye potentials. The dispersion equation valid for arbitrary parameters and dielectric permittivity of resonator layers is derived.

Keywords: Triple Layered Ball Resonator, Maxwell's equations, electromagnetic oscillations, Debye potentials

Acknowledgments: the work was supported by the Russian Foundation for Basic Research grant № 19-31-51004.

1. Постановка задачи

Рассмотрим трехслойный шар радиуса r_3 , расположенный в изотропной среде. Он представляет собой систему из внутреннего шара радиуса r_1 , и сферически симметричных диэлектрических слоев с постоянными диэлектрическими и магнитными проницаемостями:

$$\varepsilon(r) = \begin{cases} \varepsilon_1, & r \leq r_1; \\ \varepsilon_2, & r_1 \leq r \leq r_2; \\ \varepsilon_3, & r_2 \leq r \leq r_3; \\ \varepsilon_4, & r_3 \leq r; \end{cases} \quad \mu(r) = \begin{cases} \mu_1, & r \leq r_1; \\ \mu_2, & r_1 \leq r \leq r_2; \\ \mu_3, & r_2 \leq r \leq r_3; \\ \mu_4, & r_3 \leq r; \end{cases}$$

где $\varepsilon_j = \varepsilon_{0j}(1 + i\delta_{0j})$, $\mu_j = \mu_{0j}$; $\varepsilon_{0j}, \mu_{0j}$ ($j=1, 2, 3, 4$) – относительные диэлектрические и магнитные проницаемости; $\text{tg}\delta_{0j}$ – тангенс угла диэлектрических потерь j -го слоя.

Решение уравнений Максвелла в случае пространства с диэлектрическим шаром можно свести к решению скалярного уравнения для так называемых потенциалов Дебая. Для решения воспользуемся сферической системой координат r, θ, φ и получим дифференциальные уравнения для электромагнитных потенциалов вида:

$$\left(T_j + \frac{\Delta_{\perp}}{r^2} \right) U_j^E(r, \theta, \varphi) = 0,$$

$$\left(T_j + \frac{\Delta_{\perp}}{r^2} \right) U_j^H(r, \theta, \varphi) = 0,$$

где $\Delta_{\perp} = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$; $T_j = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \chi_j^2$; $\chi = \sqrt{\varepsilon\mu}k$; $k = \frac{\omega}{c}$,
 c – скорость света.

Решения уравнений (1) должны удовлетворять условиям: конечность амплитуд полей колебаний в центре сферы ($r=0$), отсутствие приходящей и наличие уходящей волны при $r \rightarrow \infty$, непрерывность тангенциальных компонент полей на поверхностях раздела сред.

Функции $U_j^S(r, \theta, \varphi)$ представим в виде:

$$U_j^S(r, \theta, \varphi) = \sum_q R_{j,q}^S(r) P_n^m(\cos\theta) \exp(im\varphi),$$

где $P_n^m(\cos\theta)$ – функции Лежандра первого рода, функции $R_{j,q}^S(r)$ описывают распределение по радиальной координате полей S-типа q -й моды в j -й области. Индекс q содержит индексы m, n , которые обозначают соответственно число вариаций поля по азимутальному φ , а при $m=0$ по полярному θ углам сферической системы координат, связанной с осью OZ .

Соотношения (1), определяющие компоненты q -й моды E-типа и H-типа, в сферической системе координат приобретает вид:

$$H_{q,r}(r, \theta, \varphi) = 0,$$

$$E_{q,r}(r, \theta, \varphi) = \left[\varepsilon(r)\mu(r)k^2 + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right] U_q^E(r, \theta, \varphi),$$

$$H_{q,\theta}(r, \theta, \varphi) = -\frac{ik\varepsilon(r)}{i \sin \theta} \frac{\partial U_q^E(r, \theta, \varphi)}{\partial \varphi},$$

$$E_{q,\theta}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_q^E(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta \partial r},$$

$$H_{q,\varphi}(r, \theta, \varphi) = \frac{ik\varepsilon(r)}{r} \frac{\partial U_q^E(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta},$$

$$E_{q,\varphi}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{i \sin \theta} \frac{\partial^2 U_q^E(r, \theta, \varphi)}{\partial \varphi \partial r};$$

$$H_{q,r}(r, \theta, \varphi) = \left[\varepsilon(r)\mu(r)k^2 + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right] U_q^H(r, \theta, \varphi),$$

$$E_{q,r}(r, \theta, \varphi) = 0,$$

$$H_{q,\theta}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_q^H(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta \partial r},$$

$$E_{q,\theta}(r, \theta, \varphi) = \frac{ik\mu(r)}{i \sin \theta} \frac{\partial U_q^H(r, \theta, \varphi)}{\partial \varphi},$$

$$H_{q,\varphi}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{i \sin \theta} \frac{\partial^2 U_q^H(r, \theta, \varphi)}{\partial \varphi \partial r},$$

$$E_{q,\varphi}(r, \theta, \varphi) = -\frac{ik\mu(r)}{r} \frac{\partial U_q^H(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta}.$$

Функции $R_q^S(r)$ определяющие распределение по радиальной координате полей парциальной q -й моды S-типа, описываются соотношениями:

$$R_q^S(r) = \left\{ \begin{array}{ll} A_{q,1}^S j_n(\chi_1 r), & 0 \leq r \leq r_1 \\ A_{q,2}^S j_n(\chi_2 r) + B_{q,2}^S \eta_n(\chi_2 r), & r_1 \leq r \leq r_2 \\ A_{q,3}^S j_n(\chi_3 r) + B_{q,3}^S \eta_n(\chi_3 r), & r_2 \leq r \leq r_3 \\ A_{q,4}^S h_n^{(1)}(\chi_4 r), & r_3 \leq r \end{array} \right\}. \quad (2)$$

Здесь $A_{q,j}^S, B_{q,j}^S$ – амплитуды колебаний S-типа в j области; $J_n(x), \eta_n(x), h_n^{(1)}(x)$ – сферические функции, связанные отношениями вида $z_n(x) = \sqrt{\pi x / 2Z} J_{n+\frac{1}{2}}(x)$ с цилиндрическими функциями Бесселя $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$, Неймана $N_{n+\frac{1}{2}}(x)$ и Ханкеля $H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(x)$ соответственно.

Граничные условия на j -й поверхности раздела сред удовлетворяются при

$$\zeta_j R_q^S(\chi_j r_j) = \zeta_{j+1} R_q^S(\chi_{j+1} r_j) \quad \text{и} \quad \left. \frac{dR_q^S(\chi_j r)}{dr} \right|_{r=r_j} = \left. \frac{dR_q^S(\chi_{j+1} r)}{dr} \right|_{r=r_j}.$$

Здесь $\zeta_j = \varepsilon_j$ для E-типа и $\zeta_j = \mu_j$ для H-типа колебаний.

2. Характеристическое уравнение

Удовлетворяя им и вводя обозначения $z_{i,j} = z_n(\chi_i r_j)$, приходим к системе алгебраических уравнений относительно постоянных $A_{q,j}^S, B_{q,j}^S$:

$$\left. \begin{aligned} \zeta_1 A_{q,1}^S j_{1,1} &= \zeta_2 \left[A_{q,2}^S j_{2,1} + B_{q,2}^S \eta_{2,1} \right], \\ \chi_1 A_{q,1}^S j'_{1,1} &= \chi_2 \left[A_{q,2}^S j'_{2,1} + B_{q,2}^S \eta'_{2,1} \right], \\ \zeta_2 \left[A_{q,2}^S j_{2,2} + B_{q,2}^S \eta_{2,2} \right] &= \zeta_3 \left[A_{q,3}^S j_{3,2} + B_{q,3}^S \eta_{3,2} \right], \\ \chi_2 \left[A_{q,2}^S j'_{2,2} + B_{q,2}^S \eta'_{2,2} \right] &= \chi_3 \left[A_{q,3}^S j'_{3,2} + B_{q,3}^S \eta'_{3,2} \right], \\ \zeta_3 \left[A_{q,3}^S j_{3,3} + B_{q,3}^S \eta_{3,3} \right] &= \zeta_4 A_{q,4}^S h_{4,3}^{(1)}, \\ \chi_3 \left[A_{q,3}^S j'_{3,3} + B_{q,3}^S \eta'_{3,3} \right] &= \chi_4 A_{q,4}^S h_{4,3}^{(1)}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Штрих у сферических функций обозначает дифференцирование по аргументу.

Все амплитуды в (2) определяются через $A_{q,2}^S$ следующим образом:

$$B_{q,2}^S = - \frac{[j_1 j_2]_1}{[j_1 \eta_2]_1} A_{q,2}^S$$

$$A_{q,3}^S = \frac{\zeta_2}{\zeta_3} \frac{j_{2,3} [j_1 \eta_2]_1 - \eta_{2,3} [j_1 j_2]_1}{j_{3,2} [h_4 \eta_3]_3 - \eta_{3,2} [h_4 j_3]_3} \frac{[h_4 \eta_3]_3}{[j_1 \eta_2]_1} A_{q,2}^S,$$

$$B_{q,3}^S = -\frac{[h_4 j_3]_3}{[h_4 \eta_3]_3} A_{q,3}^S,$$

$$A_{q,1}^S = \frac{\zeta_2}{\zeta_1} \left[j_{2,1} - \frac{[j_1 j_2]_1}{[j_1 \eta_2]_1} \eta_{2,3} \right] A_{q,2}^S,$$

$$A_{q,4}^S = \frac{\zeta_3}{\zeta_4 h_{4,3}} \left[j_{3,3} - \frac{[h_4 j_3]_3}{[h_4 \eta_3]_3} \eta_{3,3} \right] A_{q,3}^S,$$

Здесь

$$[f_i g_j]_k = q_i f'_{i,k} g_{j,k} - q_j f_{i,k} g'_{j,k}, q_i = \frac{\sqrt{\epsilon_i \mu_i}}{\zeta_i}.$$

Условие существования нетривиальных решений системы (3) приводит к характеристическому уравнению:

$$\begin{aligned} & [h_4 j_3]_3 \times \{ [j_1 \eta_2]_1 [j_2 \eta_3]_2 - [j_3 j_2]_1 [\eta_2 \eta_3]_2 \} = \\ & = [h_4 \eta_3]_3 \times \{ [j_1 \eta_2]_1 [j_2 j_3]_2 - [j_1 j_2]_1 [\eta_2 j_3]_2 \}. \end{aligned} \quad (4)$$

Его решения при заданных параметрах структуры определяют комплексные частоты собственных колебаний.

Заключение

Аналитически исследован диэлектрический резонатор, выполненный в форме радиально-трехслойного шара. Получено дисперсионное уравнение, справедливое при произвольных размерах и проницаемостях слоев резонатора.

Список литературы

1. Суворова О. А., Филиппов Ю. Ф. Трехслойный шаровой резонатор для измерения диэлектрических проницаемостей веществ // Радиофизика и радиоастрономия. 2007. Т. 12, № 2. С. 214–222.
2. Ораевский А. Н. Волны шепчущей галереи // Квантовая электроника. 2002. Т. 2, № 5. С. 377–400.
3. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М. : Радио и связь, 1988.

Непрерывный операторный метод решения обратных задач теории рассеяния на телах с кусочно-гладкими границами

Илья Владимирович Бойков¹, Никита Сергеевич Степанов²

^{1,2} Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия

¹i.v.boykov@gmail.com, ²ctnik1998@mail.ru

Аннотация. Описывается применение непрерывного операторного метода для нахождения волнового числа в уравнении Гельмгольца с препятствием, имеющим кусочно-гладкую границу. Эффективность метода иллюстрируется примерами.

Ключевые слова: уравнение Гельмгольца, обратная задача, обобщенные по Винеру решения, непрерывный операторный метод

Continuous operator method for solving inverse problems of the theory of scattering by bodies with piecewise smooth boundaries

Ilya V. Boykov¹, Nikita S. Stepanov²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹i.v.boykov@gmail.com, ²ctnik1998@mail.ru

Abstract. Describes the application of continuous operator method for finding the wave number in the Helmholtz equation with an obstacle having a piecewise smooth boundary is described. The effectiveness of the method is illustrated by examples.

Keywords: Helmholtz equation, inverse problem, Wiener generalized solutions, continuous operator method

Статья посвящена применению непрерывного операторного метода для решения обратной задачи теории рассеяния в пространстве R^3 на телах с кусочно-гладкими границами. Описывается применение данного метода для нахождения волнового числа в уравнении Гельмгольца. Эффективность метода иллюстрируется примерами. Отметим, что решение обратной задачи теории рассеяния в трехмерном пространстве на телах с гладкими границами исследовано в [1].

Аналитическим и численным методам решения прямых и обратных задач теории рассеяния посвящена обширная литература, достаточно подробная библиография которой содержится в [2–4]. Так как аналитическое решение прямых и, особенно, обратных задач возможно лишь для определенных классов уравнений, возникает необходимость в разработке численных методов. Для численного решения обратных задач

применяются различные методы, в том числе метод граничных интегральных уравнений.

В данной работе представлено применение непрерывного метода решения операторных уравнений [5] к решению обратных задач теории рассеяния. Преимущество непрерывного метода решения операторных уравнений применительно к нелинейным уравнениям заключается в том, что при своей реализации он не требует обратимости производной от нелинейного оператора и, более того не требует существования обратного оператора.

Однако, для применения известных методов граничных интегральных уравнений, основанных на теории потенциала [6], необходимо, чтобы область D была гладкой. Предлагаемый ниже подход решения задачи дифракции на телах с кусочно-гладкими границами основан на методе регуляризации Винера и заключается в том, что вместо исходной кусочно-гладкой области D рассматривать последовательность областей $\{D_i\}$, ($i = 1, 2, \dots$) с гладкими границами, которая аппроксимирует область D , причем $D_i \subset D_{i+1} \subset D$. Это означает, что любая точка P из D начиная с некоторого, достаточно большого i , принадлежит D_i [7].

Ниже представлено применение непрерывного операторного метода для определения волнового числа в задачах рассеяния.

Непрерывный метод решения операторных уравнений.

Непрерывный метод решения операторных уравнений основан на Ляпуновской теории устойчивости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть в банаховом пространстве B дано операторное уравнение

$$A(\mathbf{v}) = \mathbf{f}, \quad (1)$$

где $\mathbf{f} \in B$, а A – нелинейный оператор, отображающий банахово пространство B в себя. Уравнение (1) имеет изолированное решение \mathbf{v}^* .

Согласно непрерывному методу, уравнению (1) ставится в соответствие задача Коши для параметрического дифференциального уравнения

$$\frac{d\bar{\mathbf{v}}}{d\sigma} = A(\bar{\mathbf{v}}(\sigma)) - \mathbf{f}, \quad (2)$$

$$\bar{\mathbf{v}}(0) = \chi, \quad (3)$$

где $\sigma \geq 0$, значение $\chi \in B$ может быть взято произвольным, а вспомогательная функция $\bar{\mathbf{v}}(\sigma)$ связана с решением \mathbf{v}^* уравнения (1) равенством

$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{v}}(\sigma) = \mathbf{v}^*$. Достаточные условия сходимости решения начальной задачи (2)–(3) к решению нелинейного операторного уравнения (1) приведены в следующей теореме.

Теорема 1 [5]. Пусть уравнение (1) имеет решение v^* , и на любой дифференцируемой кривой $g(t)$, находящейся в шаре $R(v^*, r)$, выполняются следующие условия:

1) При любом t ($t > 0$) справедливо неравенство

$$\int_0^t \Lambda(A'(g(\tau))) d\tau \leq 0;$$

2) Имеет место неравенство $\lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t \Lambda(A'(g(\tau))) d\tau \right\} \leq \gamma_g$, где $\gamma_g > 0$.

Тогда решение начальной задачи (2)–(3) сходится к решению задачи (1) при любом начальном приближении $\chi \in R(v^*, r)$.

Здесь через $\Lambda(A)$ обозначена логарифмическая норма оператора A , определяемая формулой [8]

$$\Lambda(A) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{\|I + hA\| - 1}{h},$$

где знак \downarrow означает стремление к нулю, убывая.

Аналитические выражения для логарифмических норм в часто используемых пространствах известны. Пусть в n -мерном пространстве R_n векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$ определены нормы

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|, \quad \|x\|_2 = \left[\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right]^{1/2}, \quad \|x\|_3 = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|.$$

Тогда логарифмическая норма n -мерной A , ассоциированная с нормой вектора x , имеет следующий вид:

$$\Lambda_1(A) = \max_j \left(a_{jj} + \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \right), \quad \Lambda_2(A) = \lambda_{\max} \left(\frac{A + A^T}{2} \right),$$

$$\Lambda_3(A) = \max_i \left(a_{ii} + \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right).$$

Свойства логарифмической нормы исследованы в [8, 9]. Рассмотрим уравнение Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0, \tag{4}$$

где $k = \|k\| > 0$ – волновое число, соответствующего волновому вектору k . Уравнение (4) определено в области D с границей $\partial D \in C_2$.

Решение уравнения (4) можно представить как суперпозицию падающей плоской волны и волны рассеяния $u = u_0(x, k) + \tilde{u}$, где $u_0(x, k)$ – плоская волна, \tilde{u} – волна рассеяния.

Моделирование взаимодействия падающей волны с рассеивающей поверхностью приводит к уравнениям вида (4) с граничными условиями Дирихле и Неймана.

Построим вычислительную схему определения волнового числа. Для определенности ограничимся рассмотрением внутренней задачей в трехмерном случае.

Пусть на границе ∂D известны значения $u(x)$ и $\partial u / \partial \nu$, где ν – единичный вектор внешней нормали.

Для построения вычислительной схемы воспользуемся формулой [2]

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left[u(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} - \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \right] ds(y) = \begin{cases} -u(x), & x \in D, \\ 0, & x \in R^3 \setminus \bar{D}, \end{cases}$$

Пусть в некоторой точке $x^* \in D$ известно решение $u(x)$ уравнения (4) при известных граничных условиях.

Тогда

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left[u(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x^*-y|}}{|x^*-y|} - \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \frac{e^{ik|x^*-y|}}{|x^*-y|} \right] ds(y) = -u(x^*), \quad x^* \in D.$$

Для нахождения волнового числа k при известном значении $x^* \in D$ введем дифференциальное уравнение

$$\frac{dk(t)}{dt} = \beta \left(\frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left[u(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik(t)|x^*-y|}}{|x^*-y|} - \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \frac{e^{ik(t)|x^*-y|}}{|x^*-y|} \right] ds(y) + u(x^*) \right), \quad (5)$$

где $\beta = \pm 1$ и выбирается таким образом, чтобы логарифмическая норма производной оператора

$$H(k) = \int_{\partial D} \left[u(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik(t)|x^*-y|}}{|x^*-y|} - \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \frac{e^{ik(t)|x^*-y|}}{|x^*-y|} \right] \phi(y) ds(y)$$

была отрицательной.

При практической реализации интеграл

$$\int_{\partial D} \left[u(y) \frac{\partial}{\partial v(y)} \frac{e^{ik(t)|x^*-y|}}{|x^*-y|} - \frac{\partial u}{\partial v}(y) \frac{e^{ik(t)|x^*-y|}}{|x^*-y|} \right] \phi(y) ds(y)$$

аппроксимируется кубатурной формулой.

Для решения полученного дифференциального уравнения (5) воспользуемся методом Эйлера. Получим следующий итерационный процесс

$$k_{m+1} = k_m + \beta h \left(\frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left[u(y) \frac{\partial}{\partial v(y)} \frac{e^{ik_m|x^*-y|}}{|x^*-y|} - \frac{\partial u}{\partial v}(y) \frac{e^{ik_m|x^*-y|}}{|x^*-y|} \right] ds(y) + u(x^*) \right), \quad (6)$$

где h – шаг метода Эйлера.

Но так как в нашем случае область D является кусочно-гладкой, то вместо классического решения будем рассматривать обобщенное по Винеру решение уравнения (4).

Пусть $F(x)$ и $G(x)$ – непрерывные в \bar{D} функции, совпадающие с u и $\frac{\partial u}{\partial v}$ на ∂D , соответственно. Обозначим через $u_i(x)$ решение уравнения (4) в D_i , удовлетворяющее условию $u_i|_{\partial D_i} = F$ и $\frac{\partial u_i}{\partial v}|_{\partial D_i} = G$.

Предположим, что уравнение (4) разрешимо в областях D_i . Обобщенным по Винеру решением уравнения (4) в области D назовем функцию $u(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} u_i(x)$, $x \in D$, если такой предел существует и не зависит от выбора последовательности областей D_i и от способа построения функций F или G [7].

Таким образом, вычислительная схема (6) для кусочно-гладкой области будет иметь следующий вид

$$k_{m+1} = k_m + \beta h \left(\frac{1}{4\pi} \int_{\partial D_i} \left[F(y) \frac{\partial}{\partial v(y)} \frac{e^{ik_m|x^*-y|}}{|x^*-y|} - G(y) \frac{e^{ik_m|x^*-y|}}{|x^*-y|} \right] ds(y) + u_i(x^*) \right).$$

Приведем модельные примеры, иллюстрирующие эффективность метода.

Рассмотрим кусочно-гладкую область: куб

$$D = \{-1 \leq x \leq 1; -1 \leq y \leq 1; -1 \leq z \leq 1\},$$

и точное решение уравнения Гельмгольца (4) в D :

$$u(x, y, z) = (\cos lx + 2 \sin lx)(\cos my + 2 \sin my)(\cos rz + 2 \sin rz),$$

причем $k^2 = l^2 + m^2 + r^2$.

Вместо исходной границы области ∂D будем рассматривать следующую последовательность поверхностей

$$\partial D_i = \left\{ \bigcup_{j=1}^6 L_{ij} \cup \bigcup_{j=1}^{12} S_{ij} \cup \bigcup_{j=1}^8 R_{ij} \right\},$$

где L_{ij} – плоскости с отступами от ребер на расстояние d_i , S_{ij} – цилиндрические поверхности с отступом от ребер на расстояние d_i , радиусом d_i и высотой равной $2 - d_i$, R_{ij} – сферические поверхности с отступом от вершин на расстояние d_i по каждой переменной и радиусом d_i .

Результаты вычислений для обратной задачи детекции волны приведены в следующей таблице 1.

Таблица 1

Результаты

k^*	d_i	M	ε	r
0.5	0.001	50	0.0145966	0.012106
0.5	0.001	100	0.000320174	0.000290201
0.5	0.001	200	5.27961e-05	1.55197e-07
0.5	0.0001	50	0.0145544	0.0121063
0.5	0.0001	100	0.000339777	0.000290154
0.5	0.0001	200	5.35118e-06	1.55116e-07
0.5	0.00001	50	0.0145502	0.0121063
0.5	0.00001	100	0.000342032	0.000290149
0.5	0.00001	200	6.343e-07	1.55108e-07
1	0.001	50	0.000202205	0.000447763
1	0.001	100	6.0545e-05	1.4899e-07
1	0.001	200	6.0594e-05	1.64743e-14
1	0.0001	50	0.000207843	0.000447836
1	0.0001	100	6.00598e-06	1.49022e-07
1	0.0001	200	6.05479e-06	1.68754e-14
1	0.00001	50	0.00020918	0.000447844
1	0.00001	100	5.58461e-07	1.49026e-07

k^*	d_i	M	ε	r
1	0.00001	200	6.05292e-07	1.73196e-14
5	0.001	50	0.0148676	0.15652
5	0.001	100	0.00226536	0.0242826
5	0.001	200	6.00708e-05	0.000559045
5	0.0001	50	0.0148412	0.156554
5	0.0001	100	0.0022735	0.0242892
5	0.0001	200	5.19241e-05	0.000559247
5	0.00001	50	0.0148384	0.156557
5	0.00001	100	0.00227436	0.0242899
5	0.00001	200	5.22667e-05	0.000559268

Здесь k^* – точное значение волнового числа, d_i – радиус округления вершин и ребер куба, M – число итераций метода Эйлера, ε – погрешность определения k , r – невязка.

Список литературы

1. Бойков И. В. Степанов Н. С. Непрерывный операторный метод решения обратных задач теории рассеяния // Математическое и компьютерное моделирование естественнонаучных и социальных проблем : сб. ст. XIV Междунар. науч.-техн. конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов / под ред. И. В. Бойкова. Пенза: Изд-во ПГУ, 2020. С. 78–84.
2. Колтон Д. Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М. : Мир, 1987. 311 с.
3. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибир. науч. изд-во, 2009.
4. Hasanov H. A., Romanov V. G. Introduction to Inverse Problems for Differential Equations. Springer International Publishing AG, 2017.
5. Бойков И. В. Об одном непрерывном методе решения нелинейных операторных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 9. С. 1308–1314.
6. Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Кравцов В. В. Лекции по математической физике: учеб. пособие. М. : Изд-во МГУ, 1993. 352 с.
7. Кондратьев В. А., Олейник О. А. Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях // Успехи математических наук. 1983. Т. 38, № 3 (230). С. 3–76.
8. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М. : Наука. 1970. 534 с.
9. Лозинский С. М. Оценка погрешности численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. I // Известия высших учебных заведений. Математика. 1958. № 5. С. 52–90.

2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 517.9

Методы аппроксимации интегралов на полуоси и их применение к интегральным уравнениям

**Анастасия Михайловна Мельникова¹, Александр Николаевич Тында²,
Елена Владимировна Грозная³**

^{1,2,3}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
¹nastua_10699@mail.ru, ²tyndaan@mail.ru, ³kedrel@mail.ru

Аннотация. Рассматривается задача аппроксимации интегралов на полуоси, к которым не применимы стандартные квадратурные формулы. Построен прямой метод численного решения интегральных уравнений с бесконечным пределом интегрирования. Проведены численные эксперименты.

Ключевые слова: аппроксимация интегралов на полуоси, интегральные уравнения Вольтерра, прямой метод, ортогональные многочлены

Methods of approximation of integrals on the semi-axis and their application to integral equations

**Anastasiya M. Mel'nikova¹, Aleksandr N. Tynda²,
Elena V. Groznaya³**

^{1,2,3}Penza State University, Penza, Russia
¹nastua_10699@mail.ru, ²tyndaan@mail.ru, ³kedrel@mail.ru

Abstract. The paper deals with the problem of approximation of integrals on the semi-axis, to which standard quadrature formulas are not applicable, and also direct numerical method for solving integral equations with an infinite integration limit is constructed. Numerical results are provided.

Keywords: approximation of integrals on semi-axis, Volterra integral equations, direct method, orthogonal polynomials.

Введение

Одним из важнейших условий прогресса в области решения разнообразных исследовательских, инженерных и проектных задач является исследование и внедрение в практику прикладных разделов современной математики. К этим разделам относятся приближенные и численные методы решения интегральных уравнений, применение которых позволяет получить эффективные математические модели многих задач. Непрерывное расширение области приложения интегральных уравнений дало стимул к интенсивной разработке их теории и в особенности при-

ближенных методов решения. Появилось множество разработок по исследованию свойств различных видов интегральных уравнений, а вместе с тем возможностей методов решения.

Статья посвящена исследованию методов приближенного вычисления интегралов на полуоси, так как к таким интегралам не применимы обычные квадратурные формулы, такие как метод трапеций, Симпсона и т.д. В качестве приложения в статье проведено численное исследование одной реологической модели теории наследственной ползучести, описываемой интегральным уравнением, связывающим напряжения и деформации [1]:

$$\sigma(t) + \int_{-\infty}^t K(t,s)\sigma(s)ds = E\varepsilon(t). \quad (1)$$

Здесь $\sigma(t)$ – полное напряжение, $\varepsilon(t)$ – деформация, E – мгновенный модуль упругости, $K(t,s)$ – ядро ползучести.

1. Квадратурная формула Гаусса – Лагерра

К методам аппроксимации интегралов на полуоси относят квадратурную формулу Гаусса – Лагерра, имеющую следующий вид [2] :

$$\int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx = \sum_{i=1}^n \omega_i f(x_i) + R_n, \quad (2)$$

где e^{-x} – весовая функция интеграла, а x_i – это i -й нуль полинома Лагерра, представленного формулой Родригеса:

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} x^n e^{-x}. \quad (3)$$

Коэффициенты ω_i вычисляются по формуле:

$$\omega_i = \frac{x_i}{(n+1)^2 [L_{n+1}(x_i)]^2}$$

Для вычисления сходящегося несобственного интеграла от произвольной функции следует выполнить следующие преобразования:

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} f(x) e^x e^{-x} dx = \int_0^{\infty} g(x) e^{-x} dx$$

где $g(x) = f(x)e^x$. Далее применяется квадратурную формулу Гаусса – Лагерра к новой функции $g(x)$.

Полином (3) является решением линейного дифференциального уравнения Лагерра второго порядка:

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0$$

Важным свойством полиномов Лагерра является ортогональность на полуоси $0 < x < \infty$ с весовой функцией $\rho(x) = e^{-x}$. Именно это свойство позволяет использовать полиномы для построения квадратурной формулы (2).

2. Прямой квадратурный метод

Перепишем уравнение (1) в следующем виде:

$$x(t) - \lambda \int_{-\infty}^t h(t,s)x(s)ds = f(t), \quad t \in [0, T]. \quad (4)$$

Выделив интеграл на полуоси, получим:

$$x(t) - \lambda \left(\int_{-\infty}^0 h(t,s)\varphi(s)ds + \int_0^t h(t,s)x(s)ds \right) = f(t). \quad (5)$$

Здесь $\varphi(t)$ – известная предыстория при $t \leq 0$. С помощью замены $z = -s$ преобразуем интеграл к виду, подходящему для применения формулы Гаусса-Лагерра

$$I = \int_0^{\infty} h(t,-z)\varphi(-z)ds. \quad (6)$$

Перепишем уравнение (5) с учетом всех преобразований и потребуем его выполнения в узлах сетки

$$x(t_k) - \lambda \int_0^{t_k} h(t_k,s)x(s)ds = f(t_k) + \lambda I(t_k), \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

где t_k – узлы сетки $\{t_k\}$, распределенные равномерно по отрезку $[0, T]$.

С целью упрощения изложения введем следующие обозначения

$$x(t_k) = x_k, f(t_k) = f_k, I(t_k) = I_k, k = 0, \dots, N$$

Для аппроксимации интеграла воспользуемся формулой средних прямоугольников. Тогда окончательно будем иметь:

$$x_k - \lambda \sum_{i=1}^k (t_i - t_{i-1}) \cdot h\left(t_k, \frac{t_{i-1} + t_i}{2}\right) \cdot \frac{x_{i-1} + x_i}{2} = f_k + \lambda I_k$$

Отсюда

$$x_k = \frac{f_k + \lambda I_k + \lambda \left(S + \frac{(t_k - t_{k-1})}{2} h\left(t_k, \frac{t_{k-1} + t_k}{2}\right) x_{k-1} \right)}{1 - \frac{\lambda}{2} (t_k - t_{k-1}) h\left(t_k, \frac{t_{k-1} + t_k}{2}\right)}, \quad (7)$$

где

$$S = \sum_{i=1}^k (t_i - t_{i-1}) \cdot h \left(t_k, \frac{t_{i-1} + t_i}{2} \right) \cdot \frac{x_{i-1} + x_i}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad x_0 = \varphi(0).$$

Таким образом, определив по входным данным для конкретной сетки $\{t_k\}$ значения x_k , $k = 1, 2, \dots, N$, по формуле (7), получаем приближенное решение интегрального уравнения (4).

3. Численные результаты

3.1. Аппроксимация интеграла

Рассмотрим интеграл

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-2x} dx = \frac{1}{4}. \quad (8)$$

Для его аппроксимации использовалась квадратурная формула Гаусса-Лагерра. В таблице 1 представлены погрешности $\varepsilon = |I(n) - I^*|$ приближенного вычисления интеграла (8) при различных значениях n , где $I(n)$ – приближенное значение интеграла, а I^* – точное значение.

Таблица 1

Зависимость погрешности ε вычислений от числа n

n	2	5	8	12	15	24
ε	0.105343	0.1287e-2	0.1562e-4	0.1308e-7	0.1110e-10	0.9321e-15

3.2. Решение интегрального уравнения

Рассмотрим интегральное уравнение

$$x(t) - \lambda \int_{-\infty}^t t e^{2s} x(s) ds = t^2 - \frac{\lambda(2t^2 - 2t + 1)te^{2t}}{4}, \quad (9)$$

точным решением которого является функция $x^*(t) = t^2$, а известной предысторией - $\varphi(s) = s^2$.

При расчетах использовалась формула Гаусса-Лагерра по 24 узлам и прямой квадратурный метод. Результаты решения уравнения (9) представлены в таблице 2, где N – число узлов сетки, а ε – погрешность решения.

Таблица 2

Зависимость погрешности ε вычислений от числа N

N	100	500	1000	5000	20000	50000
ε	8.4859e-5	3.392e-6	8.4798e-7	3.3919e-8	2.1199e-12	3.3911e-14

Здесь $\varepsilon = \max_{k=1, \dots, N} |x_k - x^*(t_k)|$, где x^* – точное решение интегрального уравнения.

Список литературы

1. Малкин А. Я, Исаев А. И. Реология: концепции, методы, приложения. СПб. : Профессия, 2007. 560 с
2. Тында А. Н, Гурова О. А. Аппроксимация решений слабосингулярных интегральных уравнений Вольтерра теории наследственной ползучести // Математическое и компьютерное моделирование естественнонаучных и социальных проблем : сб. ст. VI Международной научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов. Пенза: Приволжский Дом знаний, 2012. С. 54–58.
3. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица, И. Стигана. М. : Наука, 1979. 832 с
4. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев : Наукова думка, 1986. 544 с

Квадратурные формулы, содержащие наперед заданные узлы с весовой функцией $p(x) = \sqrt{1-x^2}$

Шалва Соломонович Хубежты¹, Николай Ботазович Нартиков²

^{1,2}Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова, г. Владикавказ, Республика Северная Осетия – Алания, Россия;

¹Южный математический институт – филиал ВНИЦ РАН, г. Владикавказ, Республика Северная Осетия – Алания, Россия

¹shalva57@rambler.ru, ²kmatan@nosu-team.ru

Аннотация. Рассматривается теория квадратурных формул наперед заданными узлами. Построены ортогональными многочленами по весу $p(x) = \sqrt{1-x^2}(x^2-1)$. Найдены корни этих многочленов. Вычислены соответствующие коэффициенты квадратурных формул наперед заданными узлами. Так как узлы аналитически не выражаются, то они с коэффициентами вычисляются приближенно с наивысшей алгебраической точностью, в случае $n = 1, 2, \dots, 6$. Оцениваются погрешности приближения.

Ключевые слова: квадратурные формулы, ортогональные многочлены, многочлены Чебышева, алгебраическая степень точности квадратурных формул

Квадратурные формулы, содержащие наперед заданные узлы с весовой функцией $p(x) = \sqrt{1-x^2}$

Shalva S. Khubezhty¹, Nikolay B. Nartikoev²

^{1,2}North Ossetian State University after K. L. Khetagurov, Vladikavkaz, North Ossetia – Alania, Russia;

¹Southern Mathematical Institute VSC RAS, Vladikavkaz, North Ossetia – Alania, Russia

¹shalva57@rambler.ru, ²kmatan@nosu-team.ru

Abstract. The theory of quadrature formulas with predetermined nodes is considered. Constructed by orthogonal polynomials in weight $p(x) = \sqrt{1-x^2}(x^2-1)$. The roots of these polynomials are found. The corresponding coefficients of the quadrature formulas are calculated by the given nodes in advance. Since the nodes are not analytically expressed, therefore they are calculated with coefficients approximately with the highest algebraic accuracy, in the cases $n = 1, 2, \dots, 6$. The approximation errors are estimated.

Keywords: quadrature formulas, orthogonal polynomials, Chebyshev's polynomials, algebraic degree of accuracy of quadrature formulas

В прикладных задачах математической физики, механики и техники часто возникает необходимость построения таких квадратурных формул, часть узлов которых задается заранее, другая часть узлов может быть взята произвольно. Это встречается, например, при решении граничных задач дифференциального уравнения второго порядка на отрезке $[a, b]$.

В таких случаях при выборе квадратурной формулы естественно принять во внимание, что значения неизвестной функции на концах отрезка $[a, b]$ нам известны, и взять формулу вида

$$\int_a^b f(x)dx \approx Af(a) + Bf(b) + \sum_{k=1}^n A_k f(x_k), \quad (1)$$

содержащую два фиксированных узла a и b . Прочие узлы x_k ($k=1, 2, \dots, n$) являются произвольными.

В общем случае квадратурные формулы, содержащие наперед заданные узлы имеют вид

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k) + \sum_{l=1}^m B_l f(a_l), \quad (2)$$

в которых m узлов a_1, a_2, \dots, a_m фиксированы.

Введем два многочлена, связанных с узлами a_l и x_k :

$$\begin{aligned} \Omega(x) &= (x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_m), \\ \omega(x) &= (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n), \\ A_k &= \int_a^b p(x)\Omega(x) \frac{\omega(x)}{(x - x_k)(\omega(x_k)\Omega(x_k))'} dx, \\ B_l &= \int_a^b p(x)\Omega(x) \frac{\omega(x)}{(x - a_l)(\omega(a_l)\Omega(a_l))'} dx. \end{aligned} \quad (3)$$

За счет выбора коэффициентов A_k и B_l формулу (2) можно сделать верной для многочленов степени $n+m-1$. Для того, чтобы равенство (2) было верным для многочленов степени $2n+m-1$, необходимо и достаточно (см. [1, с. 168]) выполнение следующих условий.

Теорема 1. Для того чтобы формула (2) была точной для многочленов степени $2n+m-1$, необходимо и достаточно, чтобы

- 1) она была интерполяционной;
- 2) многочлен $\omega(x)$ был ортогонален на отрезке $[a, b]$ по весу $p(x)\Omega(x)$ ко всякому многочлену $Q(x)$ степени $< n$.

Таким образом, построение квадратурных формул (2), верных для многочленов степени $2n+m-1$, приводится к нахождению многочлена

степени n , ортогонального на $[a, b]$ по весу $p(x)\Omega(x)$ ко всякому многочлену меньшей степени. Корни многочлена $\omega(x)$ должны быть действительными, различными и принадлежать отрезку $[a, b]$. Кроме того, они должны быть отличны от фиксированных узлов a_l ($l=1, 2, \dots, m$).

В литературе [1–3] описывается правило построения указанных квадратурных формул. Но конкретные квадратурные формулы, в основном, построены в случаях $m=1$, $m=2$ и $p(x)=1$. В [4] нами была построены такие формулы в случае $m=2$ и $p(x)=1/\sqrt{1-x^2}$. Настоящая заметка посвящена случаю $[a, b]=[-1, 1]$, $m=2$ и $p(x)=\sqrt{1-x^2}$. В этом случае, как известно, многочлены $\omega(x)$ ортогональны на отрезке $[-1, 1]$ по весовой функции $p(x)\Omega(x)$. Вычисляются по формуле [1, с. 179]

$$\omega(x) = \frac{1}{\Delta\Omega(x)} \begin{vmatrix} \tilde{P}_{n+2}(x) & \tilde{P}_{n+2}(a_1) & \dots & \tilde{P}_{n+2}(a_m) \\ \tilde{P}_{n+1}(x) & \tilde{P}_{n+1}(a_1) & \dots & \tilde{P}_{n+1}(a_m) \\ \tilde{P}_n(x) & \tilde{P}_n(a_1) & \dots & \tilde{P}_n(a_m) \end{vmatrix}, \quad (4)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \tilde{P}_{n+1}(-1) & \tilde{P}_{n+1}(1) \\ \tilde{P}_n(-1) & \tilde{P}_n(1) \end{vmatrix}, \quad (5)$$

$$\tilde{P}_n(x) = \frac{1}{2^n} U_n(x), \quad \Omega(x) = x^2 - 1,$$

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} - \text{многочлены Чебышева II рода.}$$

В итоге формулы (4) и (5) дают следующее выражение для $\omega(x)$:

$$\omega(x) = \frac{1}{2^{2+n}(n+1)(x^2-1)} ((n+1)U_{n+2}(x) - (n+3)U_n(x)). \quad (6)$$

Далее для нахождения корней $\omega(x)$ возникают трудности: они в общем случае не выражаются формулой. Поэтому будем рассматривать частные случаи, которые приведены ниже.

1. $n=1$, $\omega(x)=x$, то есть корень $x_1=0$.

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} f(x) dx \approx \frac{\pi}{16} f(-1) + \frac{\pi}{16} f(1) + \frac{3\pi}{8} f(0).$$

2. $n=2$, $\omega(x) = x^2 - \frac{1}{6}$, $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{6}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} f(x) dx \approx \frac{\pi}{40} f(-1) + \frac{\pi}{40} f(1) + \frac{9\pi}{40} f\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + \frac{9\pi}{40} f\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

$$3. n=3, \omega(x) = x^3 - \frac{3}{8}x, x_1 = -\sqrt{\frac{3}{8}}, x_2 = 0, x_3 = \sqrt{\frac{3}{8}}.$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} f(x) dx \approx \frac{\pi}{80} f(-1) + \frac{\pi}{80} f(1) + \frac{2\pi}{15} f\left(-\sqrt{\frac{3}{8}}\right) + \frac{5\pi}{24} f(0) + \frac{2\pi}{15} f\left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right).$$

$$4. n=4, \omega(x) = x^4 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{3}{80}, A = \frac{\pi}{140}, B = \frac{\pi}{140}.$$

$x_1 = -0,727412$	$A_1 = 0,261508$
$x_2 = -0,266216$	$A_2 = 0,501451$
$x_3 = 0,266216$	$A_3 = 0,501451$
$x_4 = 0,727412$	$A_4 = 0,261508$

$$5. n=5, \omega(x) = x^5 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{1}{8}x, A = \frac{\pi}{224}, B = \frac{\pi}{224}.$$

$x_1 = -0,798214$	$A_1 = 0,172198$
$x_2 = -0,442930$	$A_2 = 0,370102$
$x_3 = 0,000000$	$A_3 = 0,458149$
$x_4 = 0,442930$	$A_4 = 0,370102$
$x_5 = 0,798219$	$A_5 = 0,172198$

$$6. n=6, \omega(x) = x^6 - \frac{15}{14}x^4 - \frac{15}{56}x^2 - \frac{1}{112}, A = \frac{\pi}{336}, B = \frac{\pi}{336}.$$

$x_1 = -0,844751$	$A_1 = 0,118702$
$x_2 = -0,564399$	$A_2 = 0,273839$
$x_3 = -0,198187$	$A_3 = 0,383508$
$x_4 = 0,198187$	$A_4 = 0,383508$
$x_5 = 0,564399$	$A_5 = 0,273839$
$x_6 = 0,844751$	$A_6 = 0,118702$

Погрешности построенных квадратурных формул равны

$$R_n(f) = \frac{f^{2n+2}(\eta)}{(2n+2)!} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} (x^2-1)\omega^2(x) dx.$$

Список литературы

1. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. М. : Наука, 1967. 500 с.
2. Хубежты Ш. С. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов и некоторые их применения. Владикавказ : ЮМИ ВЦ РАН, 2011. 236 с.
3. Марданов А. А. Вычисление интегралов с особенностями и решение сингулярных интегральных уравнений. СПб. : Изд-во Петербург. ун-та, 2017. 105 с.

4. Хубежты Ш. С., Нартикоев Н. Б. Квадратурные формулы с наперед заданными узлами с весовой функцией $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : сб. ст. XV Междунар. науч.-техн. конф. (Россия, г. Пенза, 1–4 декабря). 2020. С. 22–25.

Разностные схемы для нестационарных уравнений математической физики

Илья Юрьевич Алексеев¹, Наталья Юрьевна Кудряшова²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹alekseew.ilya-2010@yandex.ru, ²math.kudryashova@yandex.ru

Аннотация. Рассматриваются двумерное уравнение теплопроводности, решение которого находится с помощью метода переменных направлений, и уравнение гиперболического типа второго порядка. Даются оценки устойчивости, сходимости и аппроксимации применяемых разностных схем.

Ключевые слова: численные методы, уравнение теплопроводности, уравнения гиперболического типа, разностные схемы, метод переменных направлений, аппроксимация, сходимость, устойчивость

Differential schemes for nonstationary equations of mathematical physics

Ilya Yu. Alekseev¹, Natal'ya Yu. Kudryashova²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹alekseew.ilya-2010@yandex.ru, ²math.kudryashova@yandex.ru

Abstract. A two-dimensional heat conduction equation, the solution of which is found using the method of alternating directions, and the equation of hyperbolic type of the second order are considered. Estimates of stability, convergence and approximation of used difference schemes are given.

Keywords: numerical methods, heat conduction equation, hyperbolic type equation, difference schemes, alternating direction method, approximation, convergence, stability

Сложность задач математической физики может быть обусловлена многомерностью, нелинейностью, наличием одновременно протекающих многих физических процессов в рамках одной системы. Получить точные аналитические решения этих задач, за исключением отдельных случаев, практически невозможно, поэтому применяют приближенные методы решения, например, конечно-разностные методы. Для возможности их эффективного использования конечно-разностные методы должны обладать основополагающими свойствами аппроксимации, устойчивости, сходимости и экономичности.

В данной работе обзорно рассматриваются численные методы решения одномерных и двумерных уравнений математической физики с постоянными и переменными коэффициентами.

Постановка задачи для двумерного уравнения теплопроводности выглядит следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad x \in G_{02}, \quad t \in (0, t_0], \\ u|_{\Gamma} = \mu(x, t), \quad u(x, 0) = u_0(x), \\ Lu = \Delta u = (L_1 + L_2)u, \quad L_{\alpha}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_{\alpha}^2}, \quad \alpha = 1, 2. \end{array} \right. \quad (1)$$

Рассматриваемая область представляет собой прямоугольник $\bar{G}_{02} = \bar{G}_0 = 0 \leq x_{\alpha} \leq l_{\alpha}, \alpha = 1, 2$, стороны которого равны l_1, l_2 , а граница — Γ , $\bar{G}_0 = G_0 + \Gamma$. В указанной области выбирается равномерная по x_{α} сетка узлов, шаги по переменным в которой будут равны $h_1 = \frac{l_1}{N_1}$ и

$$h_2 = \frac{l_2}{N_2}.$$

Положим, что γ_h является границей указанной прямоугольной области $\bar{\omega}_h$. Она будет содержать все узлы, лежащие на сторонах прямоугольника, исключая угловые, $\bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h$. Также заменим дифференциальный оператор L_{α} его разностным аналогом Λ_{α} :

$$\Lambda_{\alpha}y = y_{x_{\alpha}x_{\alpha}}^-, \quad \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2.$$

В качестве метода решения задачи будет применяться метод переменных направлений. Основная его идея состоит в замене многомерной задачи перехода с одного временного слоя на другой на последовательность решений одномерных задач.

Одномерные задачи имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, \quad i = 1, \dots, N-1, \\ y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2, \quad A_i > 0, \quad B_i > 0, \\ C_i \geq A_i + B_i, \end{array} \right. \quad (2)$$

Для реализации метода переменных направлений необходимо ввести вспомогательное промежуточное значение функции $\bar{y} = y^{n+1/2}$, которое в дальнейшем можно рассматривать как значение $t = t_{n+1/2} = t_n + \tau/2$. Теперь переход от одного слоя к следующему за ним будет осуществляться в два этапа с шагом $0,5\tau$:

$$\frac{y^{n+1/2} - y^n}{0,5\tau} = \Lambda_1 y^{n+1/2} + \Lambda_2 y^n + \varphi^n, \quad (3)$$

$$\frac{y^{n+1} - y^{n+1/2}}{0,5\tau} = \Lambda_1 y^{n+1/2} + \Lambda_2 y^{n+1} + \varphi^n. \quad (4)$$

Первая схема является неявной по направлению x_1 и является явной по x_2 , вторая схема, наоборот, является явной по x_1 и неявной по x_2 . К уравнениям (3), (4) надо добавить начальные условия следующего вида:

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad (5)$$

и разностные краевые условия в виде

$$y^{n+1} = \mu^{n+1} \quad i_2 = 0 \quad \text{и} \quad i_2 = N_2, \quad (6)$$

$$y^{n+1/2} = \bar{\mu} \quad i_1 = 0 \quad \text{и} \quad i_1 = N_1 \quad (7)$$

где

$$\bar{\mu} = \frac{1}{2}(\mu^{n+1} + \mu^n) - \frac{\tau}{4}\Lambda_2(\mu^{n+1} - \mu^n). \quad (8)$$

Поставленная разностная краевая задача (5)–(8) соответствует исходной задаче (1).

При условии, что краевые условия являются однородными, рассматривается следующая задача

$$(E - 0,5\tau\Lambda_1)(E - 0,5\tau\Lambda_2)y_t = \Lambda y + \varphi, \quad t \geq 0, \quad (9)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad y|_{\gamma_h} = 0.$$

Зададим пространство сеточных функций H на ω_h , которые обращаются в нуль на γ_h , со скалярным произведением вида

$$(y, v) = \sum_{x \in \omega_h} y(x)v(x)h_1h_2 = \sum_{i_1=1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} y(i_1h_1, i_2h_2)v(i_1h_1, i_2h_2)h_1h_2$$

и нормой $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$.

Для оценки устойчивости можно применить следующую теорему [3]:

Теорема 1. Схема (9) устойчива по начальным данным и по правой части. Для решения задачи (9) верны априорные оценки

$$\|y(t + \tau)\|_A \leq \|y(0)\|_A + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{t'=0}^t \tau \|\varphi(t')\|^2 \right)^{1/2},$$

$$\|y(t + \tau)\| \leq \|y(0)\| + \left(\sum_{t=0}^t \tau \|\varphi(t')\|_{A^{-1}}^2 \right)^{1/2}.$$

Для оценки сходимости справедлива следующая теорема:
Теорема 2. Если выполнены условия

$$\left| \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right| \leq M, \quad \left| \frac{\partial^5 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2 \partial t} \right| \leq M, \quad \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} \right| \leq M, \quad \left| \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} \right| \leq M,$$

то в сеточной норме $\|y\|_A = \|y_{\bar{x}_1}\|_{(1)}^2 + \|y_{\bar{x}_2}\|_{(2)}^2$ схема

$$\begin{cases} (E - 0,5\tau\Lambda_1)(E - 0,5\tau\Lambda_2)y_t = \Lambda y + \varphi. \\ y|_{\gamma_h} = \mu, \quad \hat{y}|_{\gamma_h}, \quad y(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

будет сходиться со скоростью $O(\tau^2 + |h|^2)$.

Применение разностных схем для гиперболического уравнения будем рассматривать в прямоугольнике

$$\overline{D_T} = [0 \leq x \leq 1] \times [0 \leq t \leq T]$$

на примере первой краевой задачи уравнения второго порядка гиперболического типа:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + f(x, t), \quad Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (x, t) \in D_T; \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \bar{u}_0(x), \quad u(0, t) = u_1(t), \quad u(1, t) = u_2(t), \quad (10) \\ 0 < c_1 \leq k(x, t) \leq c_2, \end{cases}$$

где $D_T = (0 < x < 1) \times (0 < t \leq T]$.

Также полагаем, что представленная задача имеет единственное и непрерывное в прямоугольнике $\overline{D_T}$ решение, а все необходимые производные существуют.

В результате аппроксимации получаем симметричную схему:

$$(E - \sigma\tau^2\Lambda)y_{\bar{t}\bar{t}} = \Lambda y + \varphi(x, t), \quad 0 < t = j\tau. \quad (11)$$

Первое начальное и краевое условия будут удовлетворяться точно:

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad y(0, t) = u_1(t), \quad y(1, t) = u_2(t). \quad (12)$$

Второе начальное условие $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \bar{u}_0(x)$ можно аппроксимировать следующим образом:

$$y_t(x, 0) = \tilde{u}_0(x) = \bar{u}_0(x) + 0.5\tau(Lu_0 + f)_{t=0}. \quad (13)$$

Данная аппроксимация будет иметь второй порядок по τ .

В результате получаем, что исходной задаче (10) ставится в соответствие однородная разностная схема, определяемая условиями (11)–(13).

Указанная схема будет являться трехслойной, что заставляет нас вычислять значения y^j и y^{j-1} для отыскания значения y^{j+1} . На каждом новом временном слое $t = t_{j+1}$ необходимо методом прогонки решить краевую задачу относительно $\hat{y} = y^{j+1}$.

$$\begin{cases} (E - \sigma\tau^2\Lambda)\hat{y} = F, & 0 < x = jh < 1, \quad \hat{y}_0 = \hat{u}_1, \quad \hat{y}_N = \hat{u}_2, \\ F(t) = 2y - \check{y} - \tau^2\Lambda((2\sigma - 1)y - \sigma\check{y}) + \tau^2\phi, & t \geq \tau, \\ F(0) = u_0 + \tau^2(0.5 - \sigma)\Lambda(0)u_0 + \tau\bar{u}_0(x) + 0.5\tau^2 f(x, 0). \end{cases} \quad (14)$$

Порядок аппроксимации схемы будет равен $\eta_i = O(h_i^2 + \tau^2)$.

Список литературы

1. Самарский А. А. Теория разностных схем: учеб. пособие. М. : Наука, 1977. 657 с.
2. Самарский А. А., Вабишевич П. Н. Вычислительная теплопередача: М. : Едиториал УРСС, 2003. 784 с.
3. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем: М. : Наука, 1971. 553 с.
4. Зализняк В. Е. Основы научных вычислений. Введение в численные методы для физиков: учеб. пособие для студентов естественно-научных и технических специальностей высших учебных заведений: М. : Едиториал УРСС, 2002. 296 с.

**Численное исследование одной дробной
реологической модели вязкоупругого тела на основе
схемы типа «предиктор-корректор»**

**Андрей Александрович Пухов¹, Александр Николаевич Тында²,
Наталья Валентиновна Мойко³**

^{1,2,3}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия.

¹drannik@gmail.com, ²tyndaan@mail.ru, ³89875083153@yandex.ru

Аннотация. Предложен численный метод решения нелинейных дифференциальных уравнений дробного порядка, применяемых при моделировании вязкоупругих взаимодействий. Дифференциальное уравнение сводится к эквивалентному интегральному уравнению Вольтерра со слабосингулярным ядром, к которому затем адаптируется схема предиктор-корректор с экстраполяцией по Ричардсону. Приведены численные результаты.

Ключевые слова: дробная производная Римана – Лиувилля, интегральное уравнение Вольтерра, аппроксимация интегралов, экстраполяция

**Numerical study of the fractional rheological model
of a viscoelastic body based on a predictor-corrector scheme**

Andrey A. Pukhov¹, Aleksandr N. Tynda², Natal'ya V. Moyko³

^{1,2,3}Penza State University, Penza, Russia

¹drannik@gmail.com, ²tyndaan@mail.ru, ³89875083153@yandex.ru

Abstract. In this paper, a numerical method for solving nonlinear differential equations of fractional order used in modeling viscoelastic interactions is proposed. The differential equation is reduced to the equivalent Volterra integral equation with weakly singular kernel, to which the predictor-corrector scheme with Richardson extrapolation is then adapted. Numerical results are given.

Keywords: Riemann – Liouville fractional derivative, Volterra integral equation, approximation of integrals, extrapolation

Введение

При моделировании поведения вязкоупругих материалов при различных условиях в литературе успешно применяются дифференциальные уравнения дробного порядка. Основным явлением, которое интересует нас, является деформация, а вместе с ней и вызванное изменение внутреннего состояния (перемена температуры, напряжения). В данной работе предлагается алгоритм численного решения нелинейных дифференциальных уравнений дробного порядка β , $0 < \beta < 1$.

1. Постановка задачи

Приведем сначала определение дробной производной Римана-Лиувилля порядка $\beta > 0$ функции f относительно точки t_0

$$D_{t_0}^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \frac{d^m}{dt^m} \int_{t_0}^t f(u)(t-u)^{m-\beta-1} du, \quad (1)$$

где m – целое число, определенное отношением $m-1 < \beta \leq m$.

Как известно из теории дробного исчисления [1,4], дробное дифференциальное уравнение

$$D_{t_0}^\beta (y - y_0)(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0, \quad (2)$$

сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$\frac{1}{\Gamma(-\beta)} \int_{t_0}^t \frac{y(u) - y_0}{(t-u)^{\beta+1}} du = f(t, y(t)), \quad y(t_0) = y_0. \quad (3)$$

Преобразуем уравнение (3) в эквивалентное слабосингулярное уравнение

$$y(t) = y(t_0) + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{t_0}^t (t-u)^{\beta-1} f(u, y(u)) du. \quad (4)$$

2. Дискретизация

Построим численную схему типа «предиктор-корректор» для уравнения (4) способом, описанным в [2,3].

Для аппроксимации интеграла в (4) относительно весовой функции $(t_{n+1} - u)^{\beta-1}$ будем использовать квадратурную формулу трапеций с узлами t_j , ($j = 0, 1, \dots, n+1$). Имеем

$$\int_{t_0}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - u)^{\beta-1} g(u) du \approx \int_{t_0}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - u)^{\beta-1} g_{n+1}(u) du, \quad (5)$$

где g_{n+1} – кусочно-линейный интерполянт функции g по узлам квадратурной формулы t_j , $j = 0, 1, 2, \dots, n+1$. Интеграл в правой части равенства (5) может быть вычислен аналитически:

$$\int_{t_0}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - u)^{\beta-1} g_{n+1}(u) du = \sum_{j=0}^{n+1} a_{j,n+1} g(t_j), \quad (6)$$

где

$$a_{j,n+1} = \int_{t_0}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - u)^{\beta-1} \phi_{j,n+1}(u) du, \quad (7)$$

$$\phi_{j,n+1}(u) = \begin{cases} (u - t_{j-1}) / (t_j - t_{j-1}), & \text{при } t_{j-1} < u < t_j, \\ (t_{j+1} - u) / (t_{j+1} - t_j), & \text{при } t_j < u < t_{j+1}, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (8)$$

В случае равномерных узлов $t_j = t_0 + jh$ с фиксированным шагом h , получаем следующие соотношения для коэффициентов

$$a_{j,n+1} = \begin{cases} \frac{h^\beta}{\beta(\beta+1)} (n^{\beta+1} - (n-\beta)(n+1)^\beta), & j=0, \\ \frac{h^\beta}{\beta(\beta+1)} ((n-j+2)^{\beta+1} - 2(n-j+1)^{\beta+1} + (n-j)^{\beta+1}), & 1 \leq j \leq n, \\ \frac{h^\beta}{\beta(\beta+1)}, & j=n+1. \end{cases} \quad (9)$$

Далее определяем формулу для вычисления поправок

$$y_{n+1} = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \left(\sum_{j=0}^n a_{j,n+1} f(t_j, y_j) + a_{n+1,n+1} f(t_{n+1}, y_{n+1}^P) \right). \quad (10)$$

Для вычисления значения предиктора y_{n+1}^P аппроксимируем интеграл в правой части уравнения (4) с использованием квадратурной формулы прямоугольников

$$\int_{t_0}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - u)^{\beta-1} g(u) du \approx \sum_{j=0}^{n+1} b_{j,n+1} g(t_j), \quad (11)$$

$$b_{j,n+1} = \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{n+1} - u)^{\beta-1} du = \frac{1}{\beta} \left((t_{n+1} - t_j)^\beta - (t_{n+1} - t_{j+1})^\beta \right). \quad (12)$$

В случае равномерного разбиения имеем:

$$b_{j,n+1} = \frac{h^\beta}{\beta} \left((n+1-j)^\beta - (n-j)^\beta \right).$$

Таким образом, предиктор y_{n+1}^P определяется как

$$y_{n+1}^P = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} f(t_j, y_j). \quad (13)$$

Для применения алгоритма на каждом шаге по формуле (13) сначала вычисляется предиктор y_{n+1}^P , затем величина $f(t_{n+1}, y_{n+1}^P)$ для определения из (10) корректора y_{n+1} , далее вычисляется величина $f(t_{n+1}, y_{n+1})$, которая используется в следующей итерации. Процесс повторяется. Решение $y(t)$ восстанавливается по найденным значениям $\{y_i\}$ с помощью кусочно-линейной интерполяции.

Скорость сходимости описанного метода можно улучшить, используя принцип экстраполяции. Применим экстраполяцию по Ричардсону. Для этого погрешность разлагается в ряд Тейлора по степеням шага h , затем вычисляются решения на двух сетках с числом разбиений N и удвоенным – $2N$. Формула, уточняющая решение принимает вид:

$$y_{extra} = (4y_{2N} - y_N) / 3. \quad (14)$$

3. Численный пример

В качестве модельного рассмотрим уравнение следующего вида

$$D^\beta[y - y_0](t) = \alpha y(t) + f(t), \quad \beta = 0.5, \quad y(0) = 0, \quad \alpha = -1 \text{ или}$$

$$D^{0.5}[y](t) = -y(t) + t^2 + \frac{2}{\Gamma(2.5)} t^{1.5}, \quad t \in [0, 1],$$

точным решением которого является функция $y(t) = t^2$, $\Gamma(\omega)$ – гамма-функция.

В табл. 1 и 2 приведены результаты вычислений для двух сеток – равномерной и неравномерной (со сгущением узлов к левой границе отрезка), в которых приняты следующие обозначения:

$$\epsilon_N = \max_{t \in [0, 1]} |y(t) - y_N(t)|, \quad \epsilon_{2N} = \max_{t \in [0, 1]} |y(t) - y_{2N}(t)|,$$

$$\epsilon_{extra} = \max_{t \in [0, 1]} |y(t) - y_{extra}(t)|.$$

Таблица 1

Погрешность при равномерном разбиении отрезка $[0, 1]$

N	ϵ_N	ϵ_{2N}	ϵ_{extra}
1	2	3	4
10	0.022	0.007	0.002
20	0.007	0.0022	0.0007
50	0.0015	4.9e-04	1.5e-04

Окончание табл. 1

1	2	3	4
100	4.9e-04	1.7e-04	5.8e-05
200	1.7e-04	5.7e-05	2.1e-05
400	5.7e-05	1.20e-05	1.20e-06
800	2e-05	6.8e-06	2.5e-06
1500	7.5e-06	2.6e-06	9.1e-07
3000	2.6e-06	9.2e-07	3.2e-07

Таблица 2

Погрешность при неравномерном разбиении отрезка [0,1]

N	ε_N	ε_{2N}	ε_{extra}
10	0.0161	0.005	0.002
20	0.005	0.0016	0.00061
50	0.00112	0.00037	0.000128
100	0.00037	0.000124	4.47e-005
200	0.00012	4.25e-005	1.56e-005
400	4.26e-005	1.46e-005	5.47e-006
800	1.46e-005	5.087e-006	1.93e-006
1500	5.584e-006	1.96e-006	7.47e-007
3000	1.95e-006	6.86e-007	2.64e-007

Список литературы

1. Diethelm K., Ford N. J. Analysis of Fractional Differential Equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2002. № 265. P. 229–248.
2. Diethelm K., Freed A. D. The FracPECE subroutine for the numerical solution of differential equations of fractional order // Forschung und wissenschaftliches Rechnen (S. Heinzel, T. Plessner), 1998. P. 57–71.
3. Diethelm K. An algorithm for the numerical solution of differential equations of fractional order // Electronic Transactions on Numerical Analysis. 1997. № 5. P. 1–6.
4. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск : Наука и техника, 1987. 688 с.
5. Тында А. Н., Симутина Л. А. Численное решение одного дифференциального уравнения дробного порядка теории вязкопластичности // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем : материалы XI Междунар. науч.-техн. конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов. Пенза, 2017. С. 144–150.

Приближенные методы решения нелинейных интегральных уравнений Вольтерра с переменной задержкой

Евгений Сергеевич Фролов¹, Илья Владимирович Бойков²

^{1,2}Пензенский государственный университет, г. Пенза

¹fr0love@yandex.ru, ²i.v.boykov@gmail.com

Аннотация. Исследуются двухпродуктовые модели развивающихся систем, рассматриваются основные свойства и подходы к их описанию. Приближенно решается несколько моделей подобных систем.

Ключевые слова: развивающиеся системы, двухпродуктовые модели, дифференциальные уравнения, интегральные уравнения

Approximate methods for solving nonlinear problems Volterra integral equations with a variable delay

Evgeniy S. Frolov¹, Il'ya V. Boykov²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹fr0love@yandex.ru, ²i.v.boykov@gmail.com

Abstract. Two-product models of developing systems are studied, the main properties and approaches to their description are considered. Several models of such systems are solved approximately.

Keywords: developing systems, two-product models, differential equations, integral equations

В настоящее время в связи с интенсивным развитием вычислительной техники и соответствующего математического обеспечения метод моделирования трудных задач при помощи ЭВМ стал одним из самых главных приемов теоретических и прикладных исследований. Различные проблемы для развивающихся систем – важный класс таких задач. К числу развивающихся систем относятся экономические системы в целом, отдельные отрасли и предприятия, научные организации, вычислительные центры, экологические системы, популяции, отдельные виды животных и растений, организм человека, различные органы и подсистемы организма, клетки животных и растений и т. д.

Основополагающие характеристики развивающихся систем могут быть составлены следующим образом. В начала развития прежде всего должен быть доступ к некоторым первоначальным ресурсам. В динамическую систему обязаны попадать вещество, энергия и информация. Помимо этого, необходимо наличие подсистемы воспроизводства и

улучшения развивающиеся системы, включая совершенствование самой подсистемы. Требуется учесть характер условий окружающей среды, в течение контакта с которой система формирует и расходует продукты, и вдобавок обращает внимание на устаревшие ненужные продукты, которые затем уходят из системы. Должны осуществляться отдельные балансовые зависимости между субстратами, попадающими в динамическую систему, и продуктами динамической системы, в том числе должна присутствовать функциональная связь между ресурсами, выделяемыми на внутренний прогресс и на исполнение внешних функций динамической системы, между скоростью воспроизведения ресурсов, интенсивностью их применения и итогами функционирования системы. В том числе, должна поддерживаться обстановка совместного и состязательного поведения, поддерживающие неравновесные состояния системы; требуется указать автокаталитическую и демпфирующую переменные; должны быть выделены идиотип-положительные и антиидиотипические, негативные переменные; необходимо принять во внимание ухудшение методов воссоздания и создания продуктов развивающихся систем.

Отталкиваясь от целей изучения, для описания и анализа развивающихся систем могут использоваться разнообразные классические методы. Чаще всего развивающиеся системы описываются совокупностью обыкновенных дифференциальных уравнений [1]

$$r'_i = f_i(r_1, \dots, r_n; \alpha_1, \dots, \alpha_k), \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где $R = (r_1, \dots, r_n)$ – состояние системы, α_i – параметры системы.

Помимо сказанного, развивающиеся системы могут быть описаны с помощью интегральных уравнений как

$$R(t) = \int_{-\infty}^t K(\tau, t) I(\tau) d\tau, \quad (2)$$

где I – вектор входных воздействий, R – вектор состояний системы, $K(\tau, t)$ – матрица импульсных переходных функций системы, t – время.

Как подход дифференциальных, так и подход интегральных уравнений позволяет получать практически одинаковые результаты. Поэтому в пользу того или иного аппарата при их сравнении в основном говорит лишь удобство и привычка его применения.

Тем не менее, определенные теоретические и практические преимущества интегральных уравнений выявляются благодаря устойчивости операции интегрирования по отношению к дифференцированию. Последнее обстоятельство дает возможность анализировать выражение (2), в котором $K(\tau, t)$ – любая кусочно-непрерывная функция, без особых затруднений, в отличие от дифференциальных представлений, для

которых в данном стечении обстоятельств возникает проблема исследования дифференциальных уравнений неограниченного порядка и с разрывными правыми частями.

Для описания приближенного метода решения моделей развивающихся систем рассмотрим следующую двухпродуктовую модель [2]

$$\begin{aligned} x(t) + \int_{y(t)}^t h_1(t, \tau) x(\tau) d\tau &= f_1(t), \\ \lambda x(t) + \int_{y(t)}^t h_2(t, \tau) x(\tau) d\tau &= f_2(t), \quad 0 \leq \lambda \leq 1, \quad t_0 \leq t \leq T, \end{aligned} \quad (3)$$

где $x(t) \in C_{[0, \infty]}$ и $y(t) \in C_{[0, \infty]}^1$ – искомые функции, причем $y(t)$ возрастает на отрезке $[t_0, T]$ и $0 \leq y(t) \leq t$, $h_1(t, \tau), h_2(t, \tau) \in C_{[0, \infty] \times [0, \infty]}$ и $f_1(t), f_2(t) \in C_{[0, \infty]}$ – известные функции, λ – некоторое число.

Разобьем отрезок $[t_0, T]$ на n сегментов $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$, где $t_k = t_0 + \frac{T-t_0}{n} \cdot k$, $k = \overline{0, n}$, тем самым получим равномерную сетку узлов. Будем последовательно решать следующие задачи

$$\begin{aligned} \alpha_i + \int_{\beta_i}^{t_i} h_1(t_i, \tau) \cdot \alpha_i d\tau &= f_1(t_i), \\ \lambda \alpha_i + \int_{\beta_i}^{t_i} h_2(t_i, \tau) \cdot \alpha_i d\tau &= f_2(t_i). \end{aligned} \quad (4)$$

Из которых найдем коэффициенты α_i и β_i , которые отвечают значениям функций $x(t)$ и $y(t)$ в узлах сетки соответственно.

Приближенное решение системы (3) будем строить в виде кусочно-постоянных функций

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \psi_k(t), \quad y_n(t) = \sum_{k=0}^n \beta_k \psi_k(t), \quad \psi_k(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Delta_k, \\ 0, & t \in [0, T] \setminus \Delta_k. \end{cases} \quad (5)$$

Пусть $\lambda = 1$, рассмотрим задачу

$$x(t) + \int_{y(t)}^t t\tau \cdot x(\tau) d\tau = \frac{t^4}{3} - \frac{t \sin^3 t}{3} + \frac{t^3}{2} - \frac{t \sin^2 t}{2} + t + 1,$$

$$x(t) + \int_{y(t)}^t \tau \cdot x(\tau) d\tau = \frac{t^3}{3} - \frac{\sin^3 t}{3} + \frac{t^2}{2} - \frac{\sin^2 t}{2} + t + 1, \quad (6)$$

$$0 \leq y(t) \leq t, \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}.$$

Точным решением которой являются функции $x^*(t) = t + 1$, $y^*(t) = \sin t$. Для решения данной системы разобьем отрезок $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ на $n = 100$ сегментов $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}]$, $t_k = \frac{k}{2n}$, $k = \overline{0, n}$. Результаты применения приближенного метода для системы (6) представлены в табл. 1.

Таблица 1

Результаты приближенного решения задачи (6)

t_i	$ x_n(t_i) - x^*(t_i) $	$ y_n(t_i) - y^*(t_i) $
0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000
0.0500000000	0.0000000360	0.0000000144
0.1000000000	0.0000000235	0.0000000204
0.1500000000	0.00000005561	0.00000001405
0.2000000000	0.00000007338	0.00000007370
0.2500000000	0.00000040796	0.00000027116
0.3000000000	0.00000069812	0.00000077545
0.3500000000	0.00000353453	0.00000188096
0.4000000000	0.00000514118	0.00000403541
0.4500000000	0.00000820955	0.00000788368
0.5000000000	0.0001107128	0.0001430981

Анализируя полученные результаты, можно сказать, что метод хорошо справляется с задачей отыскания приближенных значений как функции $x(t)$, так и функции $y(t)$.

Посмотрим, как метод покажет себя, если одно из интегральных уравнений Вольтерра системы будет не второго рода, а первого, то есть пусть $\lambda = 0$. Для этого приближенно решим следующую задачу

$$x(t) - \int_{y(t)}^t t\tau \cdot x(\tau) d\tau = 0,$$

$$\int_{y(t)}^t \tau \cdot x(\tau) d\tau = 6, \quad 0 \leq y(t) \leq t, \quad 10 \leq t \leq 15. \quad (7)$$

Точное решение – функции $x^*(t) = 6t$, $y^*(t) = \sqrt[3]{t^3 - 3}$. Разобьем отрезок $[10,15]$ на $n=100$ сегментов $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}]$, $t_k = 10 + \frac{5}{n} \cdot k$, $k = \overline{0, n}$.

Результаты применения приближенного метода для системы (6) представлены в таблице 2.

Таблица 2

Результаты приближенного решения задачи (7)

t_i	$ x_n(t_i) - x^*(t_i) $	$ y_n(t_i) - y^*(t_i) $
10.0000000000	0.0000005588	0.0000050123
10.5000000000	0.0000093354	0.0000039202
11.0000000000	0.0000027716	0.0000031107
11.5000000000	0.0000038637	0.0000024902
12.0000000000	0.0000036202	0.0000020205
12.5000000000	0.0000046117	0.0000016409
13.0000000000	0.0000061389	0.0000013501
13.5000000000	0.0000081501	0.0000011204
14.0000000000	0.0000005218	0.0000009306
14.5000000000	0.0000004819	0.0000007801
15.0000000000	0.0000009186	0.0000006600

Как можно заметить, метод справился и в этом случае, причем решение получилось даже более близким к точному, чем в прошлом примере.

Исходя из результатов применения метода к решению двухпродуктовых моделей развивающихся систем, можно сказать, что он достаточно хорошо справляется с подобными задачи. Однако при этом функция $y(t)$ должна отвечать довольно-таки жестким условиям, во-первых, она должна быть возрастающей на всем отрезке задачи, а во-вторых, должно выполняться неравенство $0 \leq y(t) \leq t$. В противном случае о сходимости метода говорить не приходится.

Список литературы

1. Глушков В. М. Иванов В. В., Яненко В. М. Моделирование развивающихся систем. М. : Наука, 1983. 354 с.
2. Бойков И. В. Жукова И. В. Приближенное решение систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра // Математическое и компьютерное моделирование естественнонаучных и социальных проблем : сб. ст. I Междунар. науч.-техн. конф. молодых специалистов, аспирантов и студентов / под ред. д.ф.-м.н., проф. И. В. Бойкова. Пенза : Изд-во ПГУ, 2007. С. 9–12.

Приближенное решение уравнения Прандтля методом сплайн-коллокации нулевого порядка

Никита Алексеевич Васильев

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

nikitavas2@mail.ru

Аннотация. В связи с тем, что многие задачи физики и техники приводят к интегро-дифференциальному уравнению Прандтля, необходимы современные методы его численного решения. Рассматривается вычислительная схема для интегро-дифференциального уравнения Прандтля для крыла конечного размаха. Для построения вычислительной схемы применяется метод сплайн-коллокации нулевого порядка.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, уравнение Прандтля, численное решение, метод сплайн-коллокации

Благодарности: статья подготовлена под научным руководством доктора физико-математических наук, профессора И. В. Бойкова.

Approximate solution of the Prandtl equation by the zeroth order spline-collocation method

Nikita A. Vasil'ev

Penza State University, Penza, Russia

nikitavas2@mail.ru

Abstract. Due to the fact that many problems in physics and technology lead to the Prandtl integro-differential equation, modern methods of its numerical solution are needed. A computational scheme for the Prandtl integro-differential equation for a wing of a finite span is considered. To construct a computational scheme, the zero-order spline collocation method is used.

Keywords: integro-differential equation, Prandtl equation, numerical solution, spline-collocation method

Acknowledgments: the article was prepared under the scientific supervision of Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor I. V. Boikov.

Введение

Многие задачи гидродинамики, теории аналитических функций, теории фильтрации, теории упругости, теории теплопроводности и ряда других разделов механики, физики и математической физики приводят к сингулярным интегро-дифференциальным уравнениям с интегралами, понимаемыми в смысле главного значения по Коши.

Одним из примеров таких задач может служить задача обтекания воздухом крыла конечного размаха самолета. Фундаментальным уравнением, описывающим эту задачу, является интегро-дифференциальное уравнение следующего вида:

$$\frac{F(x)}{B(x)} + \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{F'(t)}{t-x} dt = f(x), \quad -a < x < a \quad (1)$$

где функция F – неизвестная функция, требующая определения, $F'(t) = \frac{dF(t)}{dt}$, $B(x)$ и $f(x)$ заданные функции, $2a$ размах крыла.

При выводе представленного выше уравнения Прандтля были сделаны следующие допущения: каждый элемент крыла рассматривается так, будто он находится в плоскопараллельном воздушном потоке вокруг крыла. Это позволило связать геометрические характеристики крыла с его аэродинамическими свойствами.

После проведения многочисленных экспериментов и анализа их результатов, установили, что на границах крыла выполняется следующее условие:

$$F(-a) = F(a).$$

Это условие позволяет добавить граничные условия к уравнению Прандтля (1).

Так как уравнение Прандтля может быть решено в замкнутом виде только при очень строгих допущениях, то для его решения применяют различные приближенные методы. В общем случае уравнение Прандтля можно свести к уравнению Фредгольма [3].

Ниже в статье будет рассмотрен пример приближенного решения уравнения Прандтля на сегменте $[-1;1]$.

1. Приближенное решение уравнение Прандтля методом сплайн-коллокации нулевого порядка

Рассмотрим интегральное уравнение Прандтля конечного крыла следующего вида:

$$a(t)x(t) - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{x'(\tau)}{\tau-t} d\tau = f(t), \quad -1 < t < 1 \quad (2)$$

при следующих граничных условиях

$$x(-1) = \beta_0, \quad x(1) = \beta_1 \quad (3)$$

где β_0, β_1 - заданные конечные числа.

Для приближенного решения уравнения (2) построим вычислительную схему используя метод коллокаций.

Согласно методу коллокаций введем следующую сетку узлов:

$$t_k = -1 + \frac{2k}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad \text{Также введем дополнительную сетку узлов:}$$

$$\bar{t}_k = t_k + \frac{1}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Обозначим полученные интервалы как Δ_k , где $\Delta_k = [t_k, t_{k+1})$, $k = 0, 1, \dots, n-2$, $\Delta_{n-1} = [t_{n-1}, 1]$.

Также обозначим функцию $x'(t)$ следующим образом

$$x'(t) = u(t). \quad (4)$$

Подставим обозначение (4) в уравнение (2) и граничные условия (3). Тогда уравнение (2) примет вид

$$a(t) \left(\beta_0 + \int_{-1}^t u(\tau) d\tau \right) - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{u(\tau)}{\tau - t} d\tau = f(t), \quad (5)$$

А граничные условия переписутся следующим образом

$$\beta_0 + \int_{-1}^1 u(\tau) d\tau = \beta_1. \quad (6)$$

Согласно методу сплайн-коллокации нулевого порядка, приближенное решение уравнения (5)-(6) будем искать в виде кусочно-постоянной функции (т.е. сплайна нулевого порядка) на каждом участке Δ_k :

$$u_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k \Psi_k(t),$$

где функция $\Psi_k(t)$ является фундаментальным многочленом вида:

$$\Psi_k(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Delta_k, \\ 0, & t \in [-1, 1] \setminus \Delta_k, \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов $\{\alpha_k\}$ функции решения $u_n(t)$ подставим узлы \bar{t}_k в уравнение (5). Вычислив соответствующие интегралы получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$a(\bar{t}_k) \left(\beta_0 + \sum_{l=0}^{n-1} \gamma_l \frac{2}{n} \right) - \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{n-1} \int_{\Delta_l} \frac{u(\tau)}{\tau - \bar{t}_k} d\tau = f(\bar{t}_k), \quad (7)$$

с граничным условием

$$\beta_0 + \sum_{l=0}^{n-1} \gamma_l \frac{2}{n} = \beta_1. \quad (8)$$

То есть получена система из $(n + 1)$ уравнений с n неизвестными.

Для решения системы уравнений (7)-(8) воспользуемся следующим способом: в начале решим систему уравнений (7), а затем подставим полученное решение в уравнение (8), которое можно считать контрольным уравнением для системы (7)-(8).

Система уравнений (7) является системой линейных алгебраических уравнений поэтому для ее решения можно воспользоваться одним из множества известных методов решения этих систем. Ниже будем использовать итерационные методы.

2. Решение модельного примера уравнения Прандтля

Рассмотрим следующее интегральное уравнение Прандтля конечного крыла:

$$a(t)x(t) - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{x'(\tau)}{\tau - t} d\tau = f(t), \quad -1 < t < 1$$

где

$$a(t) = t, \quad x(t) = 2t^2 - 1, \quad f(t) = t(2t^2 - 1) - \frac{1}{2\pi} \cdot (8 - 4t \ln(t - 1) + 4t \ln(1 - t))$$

и граничные условия $x(-1) = 1, x(1) = 1$.

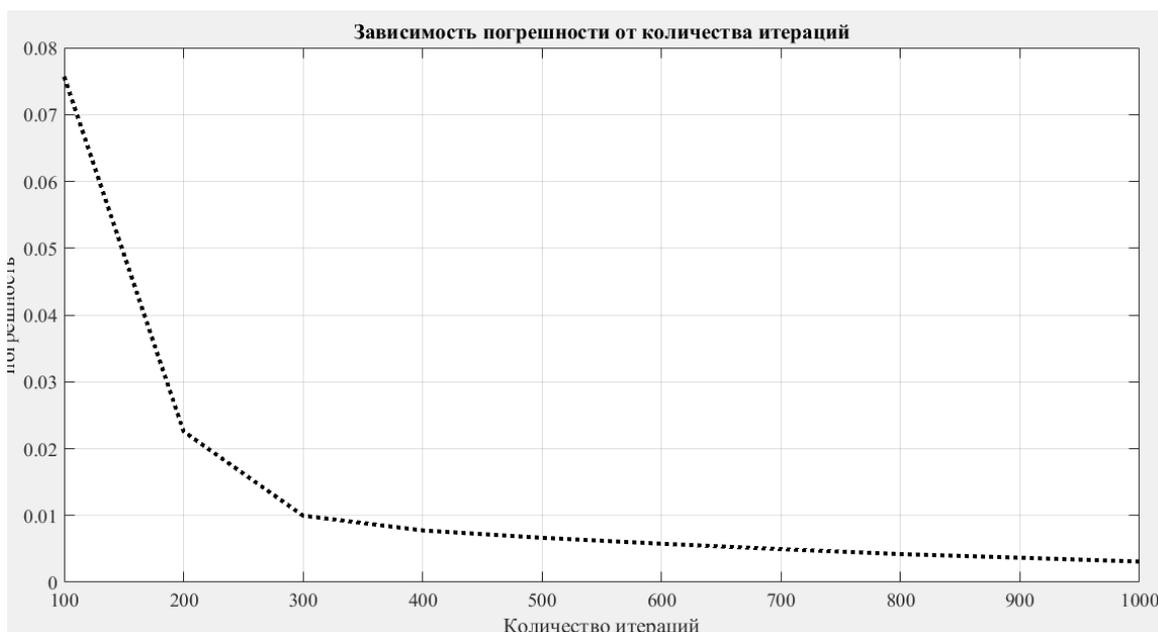


Рис. 1. График зависимости погрешности решения от количества итераций

Для решения уравнения (7) был использован метод простой итерации. На рис. 1 продемонстрирован график зависимости погрешности полученного приближенного решения от количества итераций метода простой итерации.

Список литературы

1. Голубев В. В. Лекции по теории крыльев. М. : ГИИТЛ, 1949. 480 с.
2. Бойков И. В. Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений. Пенза : Изд-во ПГУ, 2004. 297 с.
3. Бойков И. В. Приближенное решение интегральных уравнений Фредгольма с интегралом в смысле главного значения Коши – Адамара // Функциональный анализ и теория функций. 1970. Вып. 7. С. 3–23.
4. Мухелишвили Н. И. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. 3-е изд., испр. и доп. М. : Наука, 1968. 511 с.
5. Векуа И. Н. Об интегро-дифференциальном уравнении Прандтля // Прикладная математика и механика. 1945. Т. 9, № 2. С. 143–150.

Численные методы решения стационарных дифференциальных уравнений в частных производных

Сергей Викторович Трошин¹,
Наталья Юрьевна Кудряшова², Илья Юрьевич Алексеев³

^{1,2,3}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
¹hed998@gmail.com, ²math.kudryashova@yandex.ru,
³alekseew.ilya-2010@yandex.ru

Аннотация. Исследуются численные методы решения стационарных дифференциальных уравнений в частных производных. Приближенно решается несколько моделей подобных уравнений.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, численные методы, интегральные уравнения, разностные методы

Numerical methods for solving stationary differential equations in frequency derivatives

Sergey V. Troshin¹, Natal'ya Yu. Kudryashova², Il'ya Yu. Alekseev³

^{1,2,3}Penza State University, Penza, Russia
¹hed998@gmail.com, ²math.kudryashova@yandex.ru,
³alekseew.ilya-2010@yandex.ru

Abstract. Numerical methods for solving stationary partial differential equations are investigated. Several models of similar equations are solved approximately.

Keywords: differential equation, numerical methods, integral equations, difference methods

В данной работе исследуются численные методы решения стационарных уравнений математической физики разностными методами и методами сведения их к граничным интегральным уравнениям.

1. Разностные методы

Рассмотрим уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (1.1)$$

где (x, y) принадлежит произвольной области D (рисунок 1).

Аппроксимация будет строиться по узлам сеточной функции. Построим прямоугольную сетку узлов $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots$; $y_j = jl$, $j = 0, 1, \dots$; $h > 0$, $l > 0$; где h и l – шаг сетки по x и по y соответственно.

Будем предполагать, что в качестве области D выбран прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям. На границе этой области известны значения сеточной функции $u(x, y)|_{(x, y) \in \Gamma} = \phi(x, y)$.

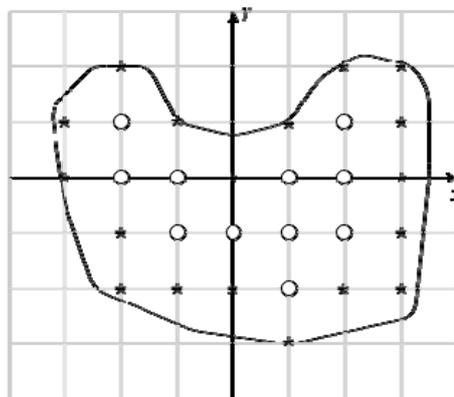


Рис. 1. Область D

Для аппроксимации будем использовать шаблон «Крест», который представлен на рисунке 2. Во внутренних узлах заменим частные производные (1.1) на разностные производные, добавим граничные условия и получим разностную схему для аппроксимации уравнения Пуассона.

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)}, \quad (1.2)$$

где

$$L_h u^{(h)} = \begin{cases} \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{l^2}, \\ u_{ij}, (ih, jl) \in \Gamma_h u_{ij}, (ih, jl) \in \Gamma_h \end{cases}$$

$$f^{(h)} \equiv \begin{cases} f(x_i, y_j), & i = 1, \dots, M-1, \\ \phi(x_i, y_j), & (ih, jl) \in \Gamma_h. \end{cases} \quad i = 1, \dots, M-1; \quad j = 1, \dots, N-1.$$

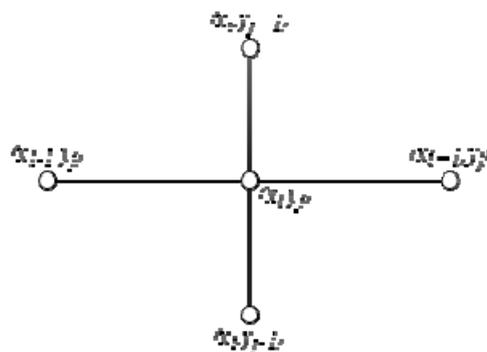


Рис. 2. Шаблон «Крест»

Разностная схема (1.2) имеет порядок аппроксимации $O(h^2 + l^2)$.

Используя разностную схему (1.2) найдем значения неизвестной функции во внутренних точках области.

1.1. Метод матричной прогонки

Применим к полученной разностной схеме метод матричной прогонки. Для начала перепишем (1.2) в виде:

$$\begin{cases} u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} + \alpha(u_{i,j+1} - 2u_{i,j-1} + u_{i,j-1}) = h^2 f(x_i, y_j), \\ i = 1, 2, \dots, M-1, \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad \frac{h^2}{l^2} = \alpha > 0, \\ u_{0,j} = f_1(y_j), \quad u_{M,j} = f_2(y_j), \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \\ u_{i,0} = f_3(x_i), \quad u_{i,N} = f_4(x_i), \quad j = 1, 2, \dots, m-1. \end{cases} \quad (1.1.1)$$

Выделим трехдиагональную матрицу A порядка $(N-1)$ и векторы правой части

$$A = \begin{bmatrix} -(2+2\alpha) & \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & -(2+2\alpha) & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -(2+2\alpha) & \alpha & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & -(2+2\alpha) & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha & -(2+2\alpha) \end{bmatrix}$$

$$f_i = \begin{pmatrix} h^2 f(x_i, y_1) - \alpha f_3(x_i) \\ h^2 f(x_i, y_2) \\ \dots \\ f(x_i, y_{N-2}) \\ h^2 f(x_i, y_{N-1}) - \alpha f_4(x_i) \end{pmatrix}$$

Матричная прогонка проходит в два этапа: прямой ход и обратный. При прямом ходе прогонки сначала вычисляем матрицы по формулам, $R_i = -(A + R_i)^{-1}$, $i = 1, 2, \dots, M-1$, предполагая, что $R_1 = 0$. Далее по формулам $s_{i+1} = R_{i+1}(s_i - f_i)$, $i = 1, 2, \dots, M-1$, предполагая, что $s_1 = \phi_0$, где ϕ_0 – вектор значений функции решения на левой границе области, находим вспомогательные векторы.

Обратный ход прогонки заключается в нахождении неизвестных векторов рекуррентно.

$$u_{i-1} = R_i u_i + s_i, \quad i = M, M-1, \dots, 1,$$

полагая $u_M = \phi_M$, где ϕ_M – вектор значений функции решения на правой границе области.

1.2. Метод Гаусса-Зейделя

Рассмотрим частный случай уравнения Пуассона, когда функция правой части нулевая

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1.2.1)$$

в некоторой прямоугольной области $D = \{(x, y), 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$, на границе которой определены граничные условия. Заменяем частные производные уравнения (1.2.1) на разностные, добавим граничные условия и получим разностную схему

$$\begin{cases} u_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{l^2}{l^2 + h^2} (u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) + \frac{h^2}{l^2 + h^2} (u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) \right], \\ i = 1, \dots, M-1, \quad j = 1, \dots, N-1, \\ u_{i0} = f_3(x), \quad u_{iN} = f_4(x), \quad i = 0, 1, \dots, M-1, \\ u_{0j} = f_1(y), \quad u_{Mj} = f_2(y), \quad j = 0, 1, \dots, N-1. \end{cases} \quad (1.2.2)$$

Приближенные значения u_{ij} будем искать решая систему (1.2.2), используя метод Гаусса-Зейделя. По этому методу необходимо строить приближенные решения по формулам:

$$u_{ij}^{(s+1)} = \frac{1}{2} \left[\frac{l^2}{l^2 + h^2} (u_{i-1,j}^{(s+1)} + u_{i+1,j}^{(s)}) + \frac{h^2}{l^2 + h^2} (u_{i,j+1}^{(s)} + u_{i,j-1}^{(s+1)}) \right], \quad (1.2.3)$$

$s = 0, 1, \dots$

Итерационный процесс можно считать завершенным при выполнении следующего условия

$$\max |u_{ij}^{(s)} + u_{ij}^{(s-1)}| \leq \varepsilon.$$

2. Метод граничных интегральных уравнений

Рассмотрим уравнение Лапласа (2.1), определенное в области D .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (2.1)$$

Будем предполагать, что на границе Γ области D задано одно из двух граничных условий

$$u|_{(x,y) \in \Gamma} = f(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{(x,y) \in \Gamma} = g(x,y) \quad (2.2)$$

В каждой точке границы задается только одна функция f или g , вторая функция остается неизвестной. Приближенное решение будем искать по формуле

$$u(\rho) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} g(t) \frac{dl}{r(\rho,t)} - \int_{\Gamma} f(t) \left[\frac{1}{r(\rho,t)} \right] dl. \quad (2.3)$$

Так как одна из функций f или g неизвестна, ее требуется найти из уравнения

$$f(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left(g(t) \frac{1}{r(P,t)} - f(t) \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{1}{r(P,t)} \right] \right) dl \quad (2.4)$$

$$f(P) = \lim_{\rho \rightarrow P} f(\rho)$$

Уравнение (2.4) является граничным интегральным уравнением и позволяет установить связь между f и g и установить соответствие обеих функций единой гармонической функции u . В качестве области D возьмем прямоугольник (рисунок 3) и будем рассматривать на границе условия 2-го рода (2.2). Неизвестную функцию f найдем из уравнения (2.5).

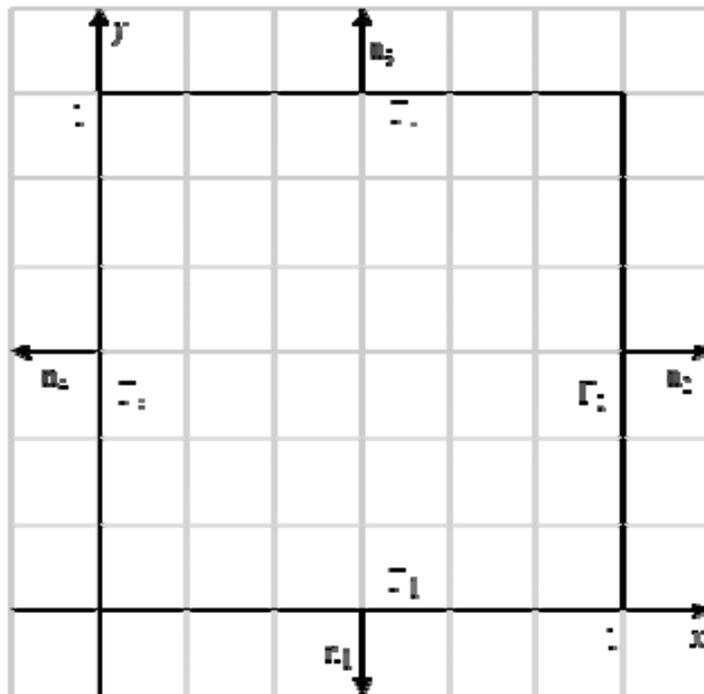


Рис. 3. Прямоугольная область

Интегральное уравнение (2.5) можно решать методом коллокации, преобразовав предварительно криволинейные интегралы в определенные и применяя квадратурные формулы.

$$\begin{aligned}
 & f(P) + \frac{1}{2\pi} \left[\int_{\Gamma_1} f(t) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r(P,t)} \right) dl + \int_{\Gamma_2} f(t) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r(P,t)} \right) dl + \right. \\
 & \left. + \int_{\Gamma_3} f(t) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r(P,t)} \right) dl + \int_{\Gamma_4} f(t) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r(P,t)} \right) dl \right] = \\
 & = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{\Gamma_1} \frac{g_1(P)}{r(P,t)} dl + \int_{\Gamma_2} \frac{g_2(P)}{r(P,t)} dl + \int_{\Gamma_3} \frac{g_3(P)}{r(P,t)} dl + \int_{\Gamma_4} \frac{g_4(P)}{r(P,t)} dl \right] \quad (2.5)
 \end{aligned}$$

Введем следующие обозначения

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{1}{r(P,t)}; \\
 \frac{\partial R}{\partial n} &= \frac{\partial R}{\partial t} \cos \alpha + \frac{\partial R}{\partial \tau} \cos \beta \\
 \frac{\partial R}{\partial n_1} &= -\frac{y-\tau}{[(x-t)^2 + (y-\tau)^2]^{3/2}} = R_1(x, y, t, \tau); \\
 \frac{\partial R}{\partial n_2} &= \frac{x-t}{[(x-t)^2 + (y-\tau)^2]^{3/2}} = R_2(x, y, t, \tau); \\
 \frac{\partial R}{\partial n_3} &= \frac{y-\tau}{[(x-t)^2 + (y-\tau)^2]^{3/2}} = R_3(x, y, t, \tau); \\
 \frac{\partial R}{\partial n_4} &= -\frac{x-t}{[(x-t)^2 + (y-\tau)^2]^{3/2}} = R_4(x, y, t, \tau);
 \end{aligned}$$

Возьмем 4 сетки узлов: x_k, y_l – равномерные сетки на каждой границе, x_k^*, y_l^* – узлы коллокации.

$$\begin{aligned}
 x_k^* &= x_k + h, \quad k = 1, 2, \dots, N-1, \quad h \in \left(0; \frac{1}{2N} \right], \\
 y_s^* &= y_s + l, \quad s = 1, 2, \dots, M-1, \quad l \in \left(0; \frac{1}{2M} \right].
 \end{aligned}$$

В результате получаем систему алгебраических уравнений (2.6),

$$\begin{aligned}
& f(x_i^*, 1) + \frac{1}{2\pi N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k^*, 0) R_1(x_i; 1; x_k^*; 0) + \frac{1}{2\pi M} \sum_{s=0}^M f(1, y_s^*) R_2(x_i; 1; 1; y_s^*) + \\
& + \frac{1}{2\pi N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k^*, 1) R_3(x_i; 1; x_k^*; 1) + \frac{1}{2\pi M} \sum_{s=0}^M f(0, y_s^*) R_4(x_i; 1; 0; y_s^*) = \\
& = \frac{1}{2\pi N} \sum_{k=0}^{N-1} g(x_k^*, 0) R(x_i; 1; x_k^*; 0) + \frac{1}{2\pi M} \sum_{s=0}^M g(1, y_s^*) R(x_i; 1; 1; y_s) + \\
& + \frac{1}{2\pi N} \sum_{k=0}^{N-1} g(x_k^*, 1) R(x_i; 1; x_k^*; 1) + \frac{1}{2\pi M} \sum_{s=0}^M g(0, y_s^*) R(x_i; 1; 0; y_s) \quad (2.6)
\end{aligned}$$

решая которую мы получим значения неизвестной функции f на границе области в узлах коллокации. Используя эти значения в (2.3), и применяя к вычислению определенных интегралов квадратурные формулы, вычислим значения неизвестной функции во внутренних узлах области по следующим формулам

$$\begin{aligned}
u(x_m, y_s) = & \frac{1}{4\pi N} \sum_{i=0}^{N-1} g(x_i^*, 0) R(x_m; y_s; x_i^*; 0) + \frac{1}{4\pi M} \sum_{i=0}^{M-1} g(1, y_i^*) R(x_m; y_s; 1; y_i^*) - \\
& - \frac{1}{4\pi N} \sum_{i=0}^{N-1} g(x_i^*, 1) R(x_m; y_s; x_i^*; 1) - \frac{1}{4\pi M} \sum_{i=0}^{M-1} g(0, y_i^*) R(x_m; y_s; 0; y_i^*) + \\
& + \frac{1}{4\pi N} \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i^*, 0) R(x_m; y_s; x_i^*; 0) + \frac{1}{4\pi M} \sum_{i=0}^{M-1} f(1, y_i^*) R(x_m; y_s; 1; y_i^*) - \\
& - \frac{1}{4\pi N} \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i^*, 1) R(x_m; y_s; x_i^*; 1) - \frac{1}{4\pi M} \sum_{i=0}^{M-1} f(0, y_i^*) R(x_m; y_s; 0; y_i^*). \quad (2.7)
\end{aligned}$$

Список литературы

1. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов / пер. с англ. Л. Г. Корнейчука; под ред. Э. И. Григолюка. М. : Мир, 1987. 524 с.
2. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М. : Наука, 1971. 553 с.

Асимптотические методы интегрирования быстроосциллирующих функций

Александра Вячеславовна Сурикова¹, Александр Николаевич Тында²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹surikova99.99@mail.ru, ²tyndaan@mail.ru

Аннотация. Представлено исследование асимптотических методов вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций. Аппроксимация таких интегралов требует особого внимания, так как традиционные квадратурные методы не только не являются точными, но и могут привести к некорректным результатам с возрастанием частоты колебаний. Предложен ряд эффективных методов вычисления интегралов от такого класса функций, проведено их численное сравнение.

Ключевые слова: осциллирующие функции, квадратурные методы, асимптотические разложения, стационарные точки, метод стационарной фазы

Asymptotic methods for integrating fast-oscillating functions

Aleksandra V. Surikova¹, Aleksandr N. Tynda²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹surikova99.99@mail.ru, ²tyndaan@mail.ru

Abstract. The paper is devoted to the study of asymptotic methods for calculating integrals of fast-oscillating functions. The approximation of such integrals requires special attention, since traditional quadrature methods are not only not accurate, but can also lead to incorrect results with increasing frequency of oscillations. A number of effective methods for calculating integrals of such a class of functions are proposed, and their numerical comparison is carried out.

Keywords: oscillating functions, quadrature methods, asymptotic expansions, stationary points, stationary-phase method

Введение

Вычисление осциллирующих интегралов является одной из важных задач в оптике, электродинамике, квантовой механике и т.д.. Например, в области акустики – метод граничных элементов требует оценки сильно колебательных интегралов для решения интегральных уравнений с колебательными ядрами. Модифицированные ряды Фурье используют интегралы от быстроосциллирующих функций для получения аппроксимационной схемы функции, которая сходится быстрее, чем стандартный ряд Фурье. В данной работе объектом исследования являются интегралы Фурье, которые имеют вид

$$\int_a^b f(x) e^{i\omega g(x)} dx, \quad (1)$$

где $g(x)$ – есть вещественная функция, называемая фазовой функцией, $f(x)$ – функция амплитуды, а ω – частота колебаний.

1. Квадратурная формула Филона

Один из самых ранних методов интегрирования быстроосциллирующих функций связан с Филоном [1], который изучал частный случай

$$\int_a^b f(x) e^{i\omega x} dx, \text{ где } \omega(b-a) \gg 1$$

Для получения аппроксимационной формулы, заменим исходный интеграл на $\int_a^b L_n(x) e^{i\omega x} dx$, где $L_n(x)$ – интерполяционный многочлен Лагранжа с узлами $x_j = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} d_j, j = \overline{1, n}$. В таком случае, получаем:

$$\int_a^b L_n(x) e^{i\omega x} dx = S_n^\omega(f) = \frac{b-a}{2} e^{i\omega \frac{b+a}{2}} \sum_{j=1}^n D_j \left(\omega \frac{b-a}{2} \right) f(x_j),$$

где

$$D_j(\epsilon) = \int_{-1}^1 \left(\prod_{k \neq j} \frac{\epsilon - d_k}{d_j - d_k} \right) e^{i\epsilon d_j} d\epsilon \quad (2)$$

3. Асимптотический метод для функций вида $x^m \sin x^k$

Пусть требуется найти значение интеграла следующего вида:

$$I = \int_a^b x^m \sin x^k dx. \quad (3)$$

После замены переменных $y = x^k, x = y^{\frac{1}{k}}, dx = \frac{1}{k} y^{\frac{1}{k}-1} dy$ интеграл I приобретает вид

$$\int_{a^k}^{b^k} y^{\frac{m}{k}} \sin y \frac{1}{k} y^{\frac{1}{k}-1} dy = \frac{1}{k} \int_{a^k}^{b^k} y^{\frac{m+1-k}{k}} \sin y dy,$$

где подынтегральная функция больше не является быстроосциллирующей, но возникает другая проблема – очень большой промежуток интегрирования. Для решения новой задачи можно применить следующий асимптотический подход. Введем обозначение

$$Z(t, \alpha) = \int_t^{\infty} y^{-\alpha} \sin y dy. \quad (4)$$

Данный интеграл сходится при $t > 0$ и любом $\alpha \geq 0$, а интеграл (3) может быть вычислен в виде $\frac{1}{k} \left[Z\left(a^k; -\frac{m+1-k}{k}\right) - Z\left(b^k; -\frac{m+1-k}{k}\right) \right]$.

При больших значениях t интеграл $Z(t, \alpha)$ можно вычислить с помощью интегрирования по частям

$$Z(t, \alpha) = \frac{\cos t}{t^\alpha} + \frac{\sin t}{t^{\alpha+1}} \alpha - \frac{\cos t}{t^{\alpha+2}} \alpha(\alpha+1) - \frac{\sin t}{t^{\alpha+3}} \alpha(\alpha+1)(\alpha+2) + R(t, \alpha), \quad (5)$$

где $R(t, \alpha)$ – остаточный член, равный:

$$R(t, \alpha) = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3) \int_t^{\infty} \frac{\sin y}{y^{\alpha+4}} dy.$$

4. Основное асимптотическое разложение

Теорема 1. *Предположим, что $g' \neq 0$ на $[a, b]$. Тогда интеграл (1) может быть вычислен в виде:*

$$I(f) \approx \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(-i\omega)^k} \left[\sigma_k(b) e^{i\omega g(b)} - \sigma_k(a) e^{i\omega g(a)} \right], \quad (6)$$

где $\sigma_1 = \frac{f}{g'}$, $\sigma_{k+1} = \frac{\sigma_k'}{g'}$.

В данном асимптотическом разложении стоит отметить, что по мере увеличения частоты поведение интеграла все больше определяется поведением подынтегрального выражения в конечных точках интервала. Фактически, поведение внутри интервала не имеет значения, поскольку $\omega \rightarrow \infty$, и все интегралы с одинаковыми граничными данными начинают вести себя одинаково по мере увеличения частоты [2].

5. Метод стационарной фазы

При определенных условиях вклад в интегралы вида (1) может вносить окрестность некоторой точки x_0 , где $x_0 \in [a, b]$ является стационарной точкой фазовой функции, т.е. такой точкой, при которой $g'(x_0) = 0$. При чем, стационарная точка x_0 является невырожденной

стационарной точкой функции g , если вторая производная функции в этой точке не равна нулю $g''(x_0) \neq 0$ [3].

Теорема 2. Пусть в интеграле (1): $f, g \in C^\infty[a, b]$ и $g'(x) \neq 0$. В таком случае исходный интеграл может быть найден с помощью:

$$I(f) \approx \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{A_k}{w^k} e^{i w g(b)} + \frac{B_k}{w^k} e^{i w g(a)} \right], w \rightarrow \infty \quad (7)$$

Здесь, коэффициенты A_k и B_k есть линейные комбинации значений функции $f(x)$ и ее производных порядка $k-1$ в соответствующих точках a и b .

Теорема 3. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ бесконечно дифференцируемы на интегрируемом отрезке, при этом фазовая функция имеет единственную стационарную точку $x_0 \in [a, b]$ и $g''(x) > 0$. Тогда при $w \rightarrow \infty$ исходный интеграл может быть оценен, в виде:

$$I(f) = \int_a^b f(x) e^{i w g(x)} dx = e^{i \frac{\pi}{4}} e^{i w g(x_0)} f(x_0) \sqrt{\frac{2\pi}{w g''(x_0)}} + O\left(\frac{1}{w}\right) \quad (8)$$

Теорема 4. Пусть функция $g(x)$ бесконечно дифференцируема на интегрируемом отрезке $\in [a, b]$ и имеет на нем конечное число стационарных точек c_1, c_m . При этом, на концах отрезка функция $g'(x) \neq 0$ и $g''(c_k) \neq 0$. В таком случае, если ограничиться асимптотикой с точностью до $O\left(w^{-\frac{3}{2}}\right)$, то получим следующую формулу:

$$I(f) = \sum_{k=1}^m \sqrt{\frac{2\pi}{w}} e^{i \frac{\pi}{4} \text{sign}(g''(c_k))} \frac{f(c_k) e^{i w g(c_k)}}{\sqrt{|g''(c_k)|}} + \frac{f(b) e^{i w g(b)}}{i w g'(b)} - \frac{f(a) e^{i w g(a)}}{i w g'(a)} + O\left(w^{-\frac{3}{2}}\right) \quad (9)$$

6. Численные результаты

Пример 1. Рассмотрим интеграл

$$\int_2^5 x^4 e^{i w x} dx, \text{ с точным решением: } -\frac{(ix^2 w^2 - 2wx - 2i) e^{i w x}}{w^3}.$$

Таблица 1

Сравнение квадратурных методов аппроксимации интеграла

Частота колебаний, w	Метод Симпсона ($n = 500$)		Метод Филона ($n = 5$)	
	Погрешность	Время выполнения	Погрешность	Время выполнения
1	3.32127e-10	1.49s	4.47213e-48	720ms
100	0.19052e-3	1.32s	2.19317e-50	510ms
10000	0.92176	1.56s	0	440ms

Пример 2. Рассмотрим интеграл

$$\int_2^5 x^2 \sin wx^3 dx, \text{ с точным решением: } -\frac{1}{3} \cos x^3.$$

Таблица 2

Сравнение методов аппроксимация без стационарных точек

Частота колебаний, w	Формула (5)		Формула (6)		Метод стац. фазы		Метод Симпсона $n = 5000$	
	error	Время	error	Время	error	Время	error	Время
1	0	50ms	0	67ms	0	55ms	1.93640e-8	10.85s
100	-	-	0	43ms	0	52ms	0.89237	13.64s
10000	-	-	0	41ms	0	49ms	2.93619	14.21s

Пример 3. Рассмотрим интеграл

$$\int_{-2}^3 3(x^2 - 1)e^{iw(x^3 - 3x)} dx, \text{ с точным решением: } \frac{-ie^{iw(x^2 - 2)}}{w}.$$

Таблица 3

Сравнение методов аппроксимация с 2 стационарными точками

Частота колебаний, w	Метод стационарной фазы		Метод Симпсона $n = 7000$	
	Погрешность	Время	Погрешность	Время
1	1.e-50	125ms	4.74179e-10	18.12s
100	2.e-52	152ms	0.72523e-3	16s
10000	5.09901e-55	130ms	0.60891	16.42s
1000000	1.41421e-56	128ms	0.29182	16.72s

Заключение

В данной работе рассматриваются асимптотические разложения и методы для интегрирования быстроосциллирующих функций. Опираясь на данные полученные из таблиц 1–3 можно сделать вывод, что стандартные квадратурные методы и в частности метод Симпсона

дают хорошую погрешность только при малой частоте колебаний и большом количестве узлов. В то время, как метод Филона уже при пяти узлах дает достаточно точное решение, которое становится только точнее, при увеличении частоты колебаний. Вместе с тем, асимптотические методы, при сравнении с точным значением, полученным аналитически, либо совпадают с ним, либо очень точным, в то время, как метод Симпсона при 5000 узлах дает погрешность только в 8 знаке, при этом затрачивая в 10 и более раз больше времени на проделанные вычисления.

Список литературы

1. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. 6-е изд. М. : БИНОМ, 2008. 636 с.
2. Olver S., Numerical Approximation of Highly Oscillatory Integrals. Cambridge : Cambridge University Press, 2008. 172 p.
3. Ильин А. М., Данилин А. Р., Асимптотические методы в анализе. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. 248 с.

Разностные методы решения задач термоупругости

Анастасия Геннадьевна Новоженова¹, Наталья Юрьевна Кудряшова²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹novozhenovanasta@mail.ru, ²math.kudryashova@yandex.ru

Аннотация. Исследована основная теория решения уравнений термоупругости при помощи разностных схем: произведена постановка задачи и найдены некоторые аналитические решения, необходимые для оценки точности разностных схем; найдены условия устойчивости; изучены два типа задач термоупругости – стационарные и нестационарные; произведено более детальное изучение схем, которые были реализованы в данной работе.

Ключевые слова: термоупругость, разностная схема, стационарная задача, нестационарная задача, метод Гаусса – Зейделя, продольно-поперечная разностная схема, метод разностной прогонки

Difference methods for solving thermoelasticity problems

Anastasiya G. Novozhenova¹, Natal'ya Yu. Kudryashova²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹novozhenovanasta@mail.ru, ²math.kudryashova@yandex.ru

Abstract. The basic theory of solving the equations of thermoelasticity using difference schemes was investigated, namely: the problem statement was made and some analytical solutions were found that are necessary for evaluating the accuracy of difference schemes; stability conditions were found; two types of thermoelasticity problems were studied – stationary and non-stationary; a more detailed study of the schemes that were implemented in this work was made.

Keywords: thermoelasticity, difference scheme, stationary problem, non-stationary problem, Gauss – Seidel method, longitudinal-transverse difference scheme, difference run method

1. Равновесие нагретого упругого тела

Рассмотрим напряженное состояние твердого упругого изотропного тела с прямоугольным сечением Ω . Для перемещения $v = (v_1(x, y); v_2(x, y))$.

Выполнены уравнения Ламе:

$$\mu \Delta v + (\lambda + \mu) \text{grad div } v - \gamma \text{grad } u + f = 0, x \in \Omega, \quad (1.1)$$

где λ и μ – постоянные Ламе, характеризующие упругие свойства среды, $\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha$, α – коэффициент линейного расширения, f – вектор объемных сил. В уравнении (1) Δ – оператор Лапласа, т.е.

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

Стационарное тепловое поле однородного тела описывается уравнением

$$\Delta u = 0, (x, y) \in \Omega. \quad (1.2)$$

Дополним уравнения (1.1) и (1.2) граничные условия

$$v(x, y) = q(x, y) \quad (1.3)$$

$$u(x, y) = g(x, y) \quad (1.4)$$

$$(x, y) \in \partial\Omega$$

Получим систему уравнений:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial y} - \gamma \frac{\partial u}{\partial x} + f_1 = 0, \quad (1.5)$$

$$\mu \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} - \gamma \frac{\partial u}{\partial y} + f_2 = 0. \quad (1.6)$$

Выберем равномерную сетку узлов x_i, y_i в области Ω . Построим разностную схему для уравнений (1.2), (1.5), (1.6).

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{l^2} = 0 \quad (1.7)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{v_{1i+1,j} - 2v_{1i,j} + v_{1i-1,j}}{h^2} + \mu \frac{v_{1i,j+1} - 2v_{1i,j} + v_{1i,j-1}}{l^2} +$$

$$+ (\lambda + 2\mu) \frac{v_{2i+1,j+1} + 2v_{2i,j+1} - v_{2i+1,j} - v_{2i,j}}{4hl} - \gamma \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + f_{i,j} = 0. \quad (1.8)$$

$$\mu \frac{v_{2i+1,j} - 2v_{2i,j} + v_{2i-1,j}}{h^2} + (\lambda + \mu) \frac{v_{2i,j+1} - 2v_{2i,j} + v_{2i,j-1}}{l^2} +$$

$$+ (\lambda + 2\mu) \frac{v_{1i+1,j+1} + v_{1i,j+1} - v_{1i+1,j} - v_{1i,j}}{4hl} - \gamma \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2l} + f_{2i,j} = 0 \quad (1.9)$$

$$v(x_i, y_j) = q(x_i, y_j), (x_i, y_j) \in \partial\Omega, \quad u(x_i, y_j) = g(x_i, y_j), (x_i, y_j) \in \partial\Omega.$$

Разностная схема (1.7)–(1.9) имеет порядок аппроксимации $O(h^2 + l^2)$.

Для реализации разностной схемы (1.7) применим метод Гаусса – Зейделя.

Перепишем уравнение (1.7) в виде:

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{l^2}{l^2 + h^2} (u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) + \frac{h^2}{l^2 + h^2} (u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) \right],$$

$$u_{i0} = g(x_i, y_0), \quad u_{iN} = g(x_i, y_N), \quad i = 1, 2, \dots, M-1.$$

$$u_{0j} = g(x_0, y_j), \quad u_{Mj} = g(x_M, y_j), \quad j = 1, 2, \dots, N-1.$$

Выберем начальное приближение $u_{ij}^{(0)}$. Последующие приближения будем находить по формулам:

$$u_{ij}^{(s+1)} = \frac{1}{2} \left[\frac{l^2}{l^2 + h^2} (u_{i-1,j}^{(s+1)} + u_{i+1,j}^{(s)}) + \frac{h^2}{l^2 + h^2} (u_{i,j+1}^{(s)} + u_{i,j-1}^{(s+1)}) \right],$$

в результате определим значения сеточной функции u_{ij} во всех узлах сетки. Для решения уравнений (1.8) и (1.9) применим итерационные методы.

Выберем начальные приближения $v_{1ij}^{(0)}$ и $v_{2ij}^{(0)}$. Приближенные значения сеточных функций v_{1ij} и v_{2ij} будем находить по формулам:

$$v_{1ij}^{(k+1)} = v_{1ij}^{(k)} + \gamma \tau_k \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} - \tau_k f_{1ij} - \tau_k (\lambda + 2\mu) \frac{v_{1i+1,j}^{(k)} - 2v_{1ij}^{(k)} + v_{1i-1,j}^{(k)}}{h^2} - \\ - \mu \tau_k \frac{v_{1i,j+1}^{(k)} - 2v_{1ij}^{(k)} + v_{1i,j-1}^{(k)}}{l^2} - \tau_k (\lambda + \mu) \frac{v_{2i+1,j+1}^{(k)} + v_{2i,j+1}^{(k)} - v_{2i+1,j}^{(k)} + v_{2i,j}^{(k)}}{4hl}.$$

$$v_{2ij}^{(k+1)} = v_{2ij}^{(k)} + \gamma \tau_k \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2l} - \tau_k f_{2ij} - \tau_k \mu \frac{v_{2i+1,j}^{(k)} - 2v_{2ij}^{(k)} + v_{2i-1,j}^{(k)}}{h^2} - \\ - (\lambda + 2\mu) \tau_k \frac{v_{2i,j+1}^{(k)} - 2v_{2ij}^{(k)} + v_{2i,j-1}^{(k)}}{l^2} - \tau_k (\lambda + \mu) \frac{v_{1i+1,j+1}^{(k)} + v_{1i,j+1}^{(k)} - v_{1i+1,j}^{(k)} + v_{1i,j}^{(k)}}{4hl}.$$

$$i = \overline{0, N-1}, \quad j = \overline{0, M-1}.$$

где τ_k – некоторый положительный числовой параметр.

2. Динамическая задача термоупругости

Рассмотрим твердое упругое изотропное тело с прямоугольным сечением Ω . Нестационарные термоупругие деформации описываются уравнением

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \mu \Delta v - (\lambda + \mu) \text{grad div } v + \gamma \text{grad } u = f, \quad (2.1)$$

$$x \in \Omega, \quad 0 < t \leq T.$$

где $\rho = \text{const}$ – плотность.

Для моделирования температурного состояния используется нестационарное уравнение теплопроводности, которое запишем в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k_{\Delta} u = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad 0 < t \leq T. \quad (2.2)$$

Для системы уравнений термоупругости (2.1), (2.2) граничные условия зададим в простейшем виде:

$$v(x, y, 0) = w^0(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = w^1(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.4)$$

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \Omega. \quad (2.5)$$

Запишем уравнение (1) для отдельных компонентов перемещения в следующем виде:

$$\rho \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} - \mu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} - (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \gamma \frac{\partial u}{\partial x_1} = f_1, \quad (2.6)$$

$$\rho \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} - (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} - (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \gamma \frac{\partial u}{\partial x_2} = f_2, \quad (2.7)$$

$$x \in \Omega, \quad 0 < t \leq T.$$

Обозначим разностные операторы:

$$\Lambda_1 u_{ij} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}}{h^2}, \quad \Lambda_2 u_{ij} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{l^2},$$

Для решения уравнения (2.2) применяем продольно поперечную разностную схему:

$$\frac{u_{i,j}^{p+1} - u_{i,j}^p}{\tau} = k \frac{u_{i-1,j}^{p+1} - 2u_{ij}^{p+1} + u_{i+1,j}^{p+1}}{h^2} + k \frac{u_{i,j+1}^{p+1} - 2u_{ij}^{p+1} + u_{i,j-1}^{p+1}}{l^2} \quad (2.8)$$

На первом этапе находим вспомогательную функцию $u_{ij}^{p+\frac{1}{2}}$ из уравнения:

$$\frac{u_{i,j}^{p+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^p}{0,5\tau} = k(\Lambda_1 u_{i,j}^{p+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 u_{i,j}^p), \quad (x_i, y_j) \in \omega_h, \quad (2.9)$$

Затем u_{ij}^{p+1} найдем из уравнения:

$$\frac{u_{i,j}^{p+1} - u_{i,j}^{p+\frac{1}{2}}}{0,5\tau} = k(\Lambda_1 u_{i,j}^{p+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 u_{i,j}^{p+1}), \quad (x_i, y_j) \in \omega_h. \quad (2.10)$$

Уравнения (2.9) и (2.10) можно решать последовательно методом разностной прогонки. Значения сеточной функции u_{ij}^p будут определены.

Затем для уравнений (2.6),(2.7) составим разностные схемы

$$\begin{aligned} & p \frac{v_{1i,j}^{p+1} - v_{1ij}^{p-1} - 2v_{1i,j}^p}{\tau^2} - (\lambda + 2\mu) \frac{v_{1i+1,j}^p - 2v_{1ij}^p + 2v_{1i-1,j}^p}{h^2} - \\ & - \mu \frac{v_{1i,j+1}^p - 2v_{1ij}^p + v_{1,j+1}^p}{l^2} - (\lambda + \mu) \frac{v_{2i+1,j+1}^p + v_{2i,j+1}^p - v_{2i+1,j}^p + v_{2i,j}^p}{4hl} = \\ & = \gamma \frac{u_{i+1j}^p - u_{i-1,j}^p}{2h} + f_1(x_i, y_j, t_p), \\ & p \frac{v_{2i,j}^{p+1} - v_{2ij}^{p-1} - 2v_{2i,j}^p}{\tau^2} - \mu \frac{v_{2i+1,j}^p - 2v_{2ij}^p + 2v_{2i-1,j}^p}{h^2} - \\ & - (\lambda + \mu) \frac{v_{2i,j+1}^p - 2v_{2ij}^p + v_{2,j+1}^p}{l^2} - (\lambda + \mu) \frac{v_{1i-1,j-1}^p + v_{1i,j+1}^p - v_{1i+1,j}^p + v_{1i,j}^p}{4hl} = \\ & = \gamma \frac{u_{i,j+1}^p - u_{i,j-1}^p}{2l} + f_2(x_i, y_j, t_p), \end{aligned}$$

Из которых определим:

$$\begin{aligned} v_{1i,j}^{p+1} &= -v_{1i,j}^{p-1} + 2v_{1i,j}^p - \gamma\tau^2 \frac{u_{i+1j}^p - u_{i-1,j}^p}{2h} - \tau^2 f_1(x_i, y_j, t_p) + \\ & + \tau^2 (\lambda + 2\mu) \frac{v_{1i+1,j}^p - 2v_{1ij}^p + 2v_{1i-1,j}^p}{h^2} + \tau^2 \mu \frac{v_{1i,j+1}^p - 2v_{1ij}^p + v_{1,j+1}^p}{l^2} - \\ & - \tau^2 (\lambda + \mu) \frac{v_{2i+1,j+1}^p + v_{2i,j+1}^p - v_{2i+1,j}^p + v_{2i,j}^p}{4hl} \\ v_{2i,j}^{p+1} &= -v_{2i,j}^{p-1} + 2v_{2i,j}^p - \gamma\tau^2 \frac{u_{i,j+1}^p - u_{i,j-1}^p}{2l} - \tau^2 f_2(x_i, y_j, t_p) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\tau^2\mu \frac{v_{2i+1,j}^p - 2v_{2ij}^p + 2v_{2i-1,j}^p}{h^2} + \tau^2(\lambda + \mu) \frac{v_{2i,j+1}^p - 2v_{2ij}^p + v_{2,j+1}^p}{l^2} - \\
& -\tau^2(\lambda + \mu) \frac{v_{1i+1,j+1}^p + v_{1i,j+1}^p - v_{1i+1,j}^p + v_{1i,j}^p}{4hl}
\end{aligned}$$

$$i = \overline{0, N-1}, \quad j = \overline{0, M-1}, \quad p = \overline{0, P-1}.$$

Значение сеточных функций на нулевом и первом временных слоях определим из условий в начальный момент времени:

$$v_1^0(x_i, y_j) = w_1^0(x_i, y_j),$$

$$v_2^0(x_i, y_j) = w_2^0(x_i, y_j),$$

$$v_{1ij}^1 = \tau w_{1ij}^1 + v_{2ij}^0,$$

$$v_{2ij}^1 = \tau w_{1ij}^2 + v_{2ij}^0.$$

Список литературы

1. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Вычислительная теплопередача. М : Едиториал УРСС, 2003. 784 с.

2. Самарский А. А. Теория разностных схем : учеб. пособие. М. : Наука, 1977.

**Об одном приближенном методе решения
гиперсингулярных интегральных уравнений
второго рода с особенностью третьего порядка**

Александр Андреевич Чекунов

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
alexander.chekunov@pm.me

Аннотация. Рассматривается вычислительная схема решения гиперсингулярного интегрального уравнения второго рода с особенностью третьего порядка, основанная на представлении решения в виде кусочно-постоянной функции. Приведен модельный пример, демонстрирующий сходимость численного решения к точному.

Ключевые слова: гиперсингулярные интегральные уравнения, теорема Адамара, приближенный метод

**On an approximate method for solving hypersingular integral
equations of the second kind with a third-order singularity**

Aleksandr A. Chekunov

Penza State University, Penza, Russia
alexander.chekunov@pm.me

Abstract. A computational scheme for solving a hypersingular integral equation of the second kind with a third-order singularity, based on the representation of the solution as a piecewise constant function, is considered. A model example is given that demonstrates the convergence of the numerical solution to the exact one.

Keywords: hypersingular integral equations, Hadamard's theorem, approximate method

Введение

Гиперсингулярные интегралы были введены в математику в начале XX в. в работах Жака Адамара [1, 2]. Позднее в связи с интенсивным развитием науки и техники в качестве методов математического моделирования в механике и физике стали применяться гиперсингулярные интегральные уравнения (ГИУ) [3]. В настоящее время приближенные методы вычисления гиперсингулярных интегралов достаточно хорошо исследованы [4], чего нельзя сказать о методах решения ГИУ. Точное решение ГИУ возможно лишь в исключительных случаях [5], и основным аппаратом в прикладных задачах являются приближенные методы.

В настоящей работе исследуются приближенные методы решения ГИУ второго рода с особенностью третьего порядка вида

$$a(t)x(t) + b(t) \int_{-1}^1 \frac{x(\tau)d\tau}{(\tau-t)^3} + \int_{-1}^1 h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t),$$

поскольку такие ГИУ находят применения в многочисленных задачах механики [6].

Классы функций

Пусть $A=[a,b]$ или $A=\gamma$, где γ – единичная окружность с центром в начале координат комплексной плоскости.

Определение 1. Если для функции $f(x)$, определенной на A , в любых

двух точках этого множества $x_1, x_2 \in A$ выполняется неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|^\alpha$, где $0 < \alpha \leq 1$, $M > 0$, то говорят, что эта функция принадлежит классу Гельдера или $f(x) \in H_\alpha(M; A)$.

Определение 2. Если функция $f(x)$, определенная на A , непрерывна, имеет непрерывные производные до $(p-1)$ -го порядка включительно и кусочно-непрерывную производную p -го порядка, для которой выполняется неравенство $|f^{(p)}(x)| \leq M$, то говорят, что эта функция принадлежит классу W^p или $f(x) \in W^p(M; A)$.

Определение 3. Если функция $f(x)$ принадлежит классу W^p , и ее производная p -го порядка удовлетворяет условию Гельдера, то есть $f^{(p)}(x) \in H_\alpha(M; A)$, то говорят, что эта функция принадлежит классу $W^p H_\alpha$ или $f(x) \in W^p H_\alpha(M; A)$.

Определения гиперсингулярных интегралов

Классическое определение гиперсингулярного интеграла было дано Ж. Адамаром [2].

Определение 4. Интеграл вида $\int_a^b \frac{\varphi(x)dx}{(b-x)^{p+\alpha}}$ при $p \in \mathbb{Z}$ и $0 < \alpha < 1$

определяет величину («конечную часть») рассматриваемого интеграла как предел при $x \rightarrow b$ суммы

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)dx}{(b-x)^{p+\alpha}} = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^b \frac{\varphi(t)dt}{(b-t)^{p+\alpha}} + \frac{f(x)dt}{(b-x)^{p+\alpha-1}}, \quad (1)$$

где $\varphi(x) \in W^p(M)$, а $f(x)$ – функция, удовлетворяющая следующим двум условиям:

- 1) рассматриваемый предел (1) существует;
- 2) $f(x) \in W^p$.

Определение гиперсингулярного интеграла в смысле главного значения Коши-Адамара на случай, когда особая точка лежит внутри интервала $[a, b]$ было сформулировано следующим образом [7].

Определение 5. Интегралом $\int_a^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - c)^p}$ при $a < c < b$ в смысле

главного значения Коши-Адамара называется предел суммы

$$\int_a^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - c)^p} = \lim_{v \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-v} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - c)^p} + \int_{c+v}^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - c)^p} + \frac{\xi(v)}{v^{p-1}} \right], \quad (2)$$

где $\varphi(\tau) \in W^{p-1} H_\alpha(M)$, а $\xi(v) \in W^{p-1}(M)$ – некоторая функция, выбранная так, чтобы указанный предел (2) существовал.

Определение 6. Интегралом $\int_a^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - a)^p}$ называется предел суммы

$$\int_a^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - a)^p} = \lim_{v \rightarrow 0} \left[\int_{a+v}^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - a)^p} + \frac{\xi(v)}{v^{p-1}} + \xi_1(v) \ln|v| \right], \quad (3)$$

где $\varphi(\tau) \in W^p(M)$, а $\xi(v)$ – функция, имеющая непрерывные производные до $(p-1)$ -го порядка, удовлетворяющие условию Дини-Липшица, $\xi_1(v)$ – некоторая функция, удовлетворяющие условию Дини-Липшица в окрестности от нуля. Функции $\xi(v)$, $\xi_1(v)$ – выбираются так, чтобы указанный предел (3) существовал.

Аналитический метод сведения гиперсингулярных интегральных уравнений к сингулярным интегро-дифференциальным уравнениям

В этом разделе, следуя [5] излагается метод сведения ГИУ к сингулярным интегро-дифференциальным уравнениям.

Рассматривается ГИУ вида

$$a(t)x(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{x(\tau) d\tau}{(\tau - t)^p} + \int_{\gamma} h(t, \tau)x(\tau) d\tau = f(t), \quad (4)$$

где, для определенности, γ – единичная окружность с центром в начале координат, $p = 3$, функция $b(t)$ не обращается в ноль на контуре γ .

Введем некоторые дополнительные обозначения. Под D^+ будем понимать внутреннюю область, ограниченную контуром γ , а под D^- – внешнюю. Через \bar{D}^+ обозначим замыкание внутренней области D^+ , а через G – открытую область, такую что $\bar{D}^+ \subset G$.

Будем искать решение $x^*(z)$, $z \in \bar{D}^+$ уравнения (4), аналитическое в D^+ и, кроме того, принадлежащее введенному ранее классу функций $x(z) \in H = W^{p-1}H_\alpha(M, \gamma)$.

Будем также считать, что выполняются следующие условия для известных функций $a(z)$, $b(z)$ и $f(z)$:

- 1) функции $a(t)$, $b(t)$ и $f(t)$ являются аналитическими в G ;
- 2) $a(z) \neq 0$, $z \in D^+$.

Пусть $x^*(t)$ – решение уравнения (4). Тогда

$$x^*(t) = \frac{f(t)}{a(t)} - \frac{b(t)}{a(t)\pi i} \int_{\gamma} \frac{x^*(\tau) d\tau}{(\tau-t)^p} - \frac{1}{a(t)} \int_{\gamma} h(t, \tau) x^*(\tau) d\tau,$$

что по определению гиперсингулярных интегралов эквивалентно уравнению

$$x^*(t) = \frac{f(t)}{a(t)} - \frac{b(t)}{a(t)\pi i(p-1)!} \int_{\gamma} \frac{x^{*(p-1)}(\tau) d\tau}{\tau-t} - \frac{1}{a(t)} \int_{\gamma} h(t, \tau) x^*(\tau) d\tau.$$

Функция

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{x^*(\tau) d\tau}{(\tau-z)^p} = \frac{1}{\pi i(p-1)!} \int_{\gamma} \frac{x^{*(p-1)}(\tau) d\tau}{\tau-z}$$

аналитическая при $z \notin \gamma$. Таким образом, функция

$$x^*(z) = \frac{f(z)}{a(z)} - \frac{b(z)}{a(z)\pi i(p-1)!} \int_{\gamma} \frac{x^{*(p-1)}(\tau) d\tau}{\tau-z} - \frac{1}{a(z)} \int_{\gamma} h(z, \tau) x^*(\tau) d\tau$$

аналитическая в D^+ .

Следовательно, $x^*(t)$ – краевое значение аналитической функции

$$\frac{f(z)}{a(z)} - \frac{b(z)}{a(z)\pi i} \int_{\gamma} \frac{x^*(\tau) d\tau}{(\tau-z)^p} - \frac{1}{a(z)} \int_{\gamma} h(z, \tau) x^*(\tau) d\tau =$$

$$= \frac{f(z)}{a(z)} - \frac{b(z)}{a(z)\pi i(p-1)!} \int_{\gamma} \frac{x^{*(p-1)}(\tau) d\tau}{\tau-z} - \frac{1}{a(z)} \int_{\gamma} h(z,\tau) x^*(\tau) d\tau,$$

которое может быть продолжено на область D^+ , таким образом

$$x^*(z) = \frac{f(z)}{a(z)} - \frac{b(z)}{a(z)\pi i} \int_{\gamma} \frac{x^*(\tau) d\tau}{(\tau-z)^p} - \frac{1}{a(z)} \int_{\gamma} h(z,\tau) x^*(\tau) d\tau$$

Согласно условиям, наложенным на решение $x^*(t)$ получаем

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{x^*(\tau) d\tau}{(\tau-t)^p} = \frac{1}{\pi i(p-1)!} \frac{d^{p-1}}{dt^{p-1}} \int_{\gamma} \frac{x^*(\tau) d\tau}{\tau-t}$$

Для функции $x^*(t)$, аналитической в D^+ и принадлежащей классу Гельдера, справедливо равенство [8]

$$x^*(t) = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{x^*(\tau) d\tau}{\tau-t},$$

следовательно,

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{x^*(\tau) d\tau}{(\tau-t)^p} = \frac{1}{(p-1)!} \frac{d^{p-1}}{dt^{p-1}} x^*(t).$$

Таким образом, решение $x(t)$ ГИУ (4) удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$\frac{d^{p-1}}{dt^{p-1}} x(t) + (p-1)! \frac{a(t)}{b(t)} x(t) + \frac{(p-1)!}{b(t)} \int_{\gamma} h(t,\tau) x(\tau) d\tau = \frac{(p-1)!}{b(t)} f(t)$$

Вычислительная схема

Рассмотрим ГИУ второго рода с особенностью третьего порядка

$$a(t)x(t) + b(t) \int_{-1}^1 \frac{x(\tau) d\tau}{(\tau-t)^3} + \int_{-1}^1 h(t,\tau) x(\tau) d\tau = f(t), \quad (5)$$

где $b(t)$ не обращается в ноль на сегменте $[-1,1]$.

Разобьем отрезок $[-1,1]$ на N сегментов

$$\Delta_i = [t_i, t_{i+1}), \Delta_{N-1} = [t_{N-1}, 1],$$

где

$$t_i = -1 + i \frac{2}{N}, \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (6)$$

Введем еще одну систему узлов с половинным шагом от (6)

$$\bar{t}_i = t_i + \frac{i}{N}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1.$$

Приближенное решение уравнения (5) будет определяться в виде кусочно-постоянной функции

$$x_N(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i \Phi_i(t),$$

где

$$\Phi_i(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Delta_i, \\ 0, & t \notin \Delta_i, \end{cases}$$

а коэффициенты λ_i определяются из СЛАУ

$$a(\bar{t}_i) \lambda_i + b(\bar{t}_i) \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i-2 \\ j \neq i-1 \\ j \neq i+1}}^{N-1} \lambda_j \int_{\Delta_j} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_i)^3} + \frac{2}{N} \sum_{j=0}^{N-1} h(\bar{t}_i, \bar{t}_j) \lambda_j = f(\bar{t}_i), \quad (7)$$

$$i = 0, 1, \dots, N-1.$$

Перепишем СЛАУ (7) в матричном виде

$$CX = F,$$

где элементы $X = \{x_i\}$, $F = \{f_i\}$, $C = \{c_{ij}\}$ имеют соответствующий СЛАУ (7) вид.

Оценим диагональные элементы матрицы левой части СЛАУ (7). Гиперсингулярные интегралы по сегментам при $i = j$ по определению вычисляются следующим образом

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_i)^3} = -\frac{N^2}{8}.$$

Теорема Адамара об обратимости квадратных матриц. Квадратная матрица A является невырожденной, если справедливы неравенства

$$|c_{ii}| > \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N |c_{ij}|, \quad i = 0, 2, \dots, N.$$

Рассмотрим частный случай, когда $\text{sgn}(a(\bar{t}_i)) \neq \text{sgn}(b(\bar{t}_i))$. При достаточно большом N диагональные элементы матрицы СЛАУ (7) оцениваются неравенствами

$$\begin{aligned} |c_{ii}| &= \left| a(\bar{t}_i) + b(\bar{t}_i) \int_{\Delta_i} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_i)^3} + \frac{2}{N} h(\bar{t}_i, \bar{t}_i) \right| \geq \\ &\geq \left| a(\bar{t}_i) - \frac{N^2}{8} b(\bar{t}_i) \right| - \frac{2}{N} |h(\bar{t}_i, \bar{t}_i)| \geq \\ &\geq |a(\bar{t}_i)| + \frac{N^2}{8} |b(\bar{t}_i)| - \frac{2}{N} \max_{-1 \leq t, \tau \leq 1} |h(t, \tau)|, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Сумму модулей недиагональных элементов i -й строки матрицы левой части СЛАУ (7). обозначим s_i . Для этого же случая оценим элементы s_i неравенством

$$s_i \leq |b(\bar{t}_i)| \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i-2 \\ j \neq i-1 \\ j \neq i \\ j \neq i+1}}^{N-1} \left| \int_{\Delta_j} \frac{d\tau}{(t - \bar{t}_i)^3} \right| + 2 \max_{-1 \leq t, \tau \leq 1} |h(t, \tau)|.$$

В частности, при достаточно большом N и $0, 1, 2 < i < N-3, N-2, N-1$

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i-2 \\ j \neq i-1 \\ j \neq i \\ j \neq i+1}}^{N-1} \left| \int_{\Delta_j} \frac{d\tau}{(t - \bar{t}_i)^3} \right| &= \sum_{j=0}^{i-3} \left| \int_{\Delta_j} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_i)^3} \right| + \sum_{j=i+2}^{N-1} \left| \int_{\Delta_j} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_i)^3} \right| = \\ &= \left| \sum_{j=0}^{i-3} \int_{\Delta_j} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_i)^3} \right| + \left| \sum_{j=i+2}^{N-1} \int_{\Delta_j} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_i)^3} \right| = \left| \int_{-1}^{t_{i-3}} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_i)^3} \right| + \left| \int_{t_{i+2}}^1 \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_i)^3} \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{N^2}{16} - \frac{1}{2(1+t_i)^2} - \frac{1}{2(1-t_i)^2} \right| = N^2 \left[\frac{1}{16} - \frac{1}{8i^2} - \frac{1}{8(N-i)^2} \right], \quad (8) \end{aligned}$$

максимум выражения (8) достигается при $i = \frac{N}{2}$, таким образом, полагая, что $N = 2k$, $k = 1, 2, \dots$ получаем оценку

$$\sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i-2 \\ j \neq i-1 \\ j \neq i \\ j \neq i+1}}^{N-1} \left| \int_{\Delta_j} \frac{d\tau}{(t - \bar{t}_i)^3} \right| \leq \frac{N^2}{16} - 1.$$

При $i = 0, N - 1$ (и аналогично при $i = 1, 2, N - 3, N - 2$) получаем

$$\sum_{j=2}^{N-1} \left| \int_{\Delta_j} \frac{d\tau}{(\tau - t_0)^3} \right| = \frac{N^2}{32} - \frac{1}{8};$$

$$\sum_{j=0}^{N-4} \left| \int_{\Delta_j} \frac{d\tau}{(\tau - t_{N-1})^3} \right| = \left| \int_{-1}^{t_{N-3}} \frac{d\tau}{(\tau - t_{N-1})^3} \right| \leq \frac{N^2}{32} - \frac{1}{8}.$$

Таким образом, оценки суммы модулей недиагональных элементов имеют вид

$$s_i \leq |b(\bar{t}_i)| \left(\frac{N^2}{16} - 1 \right) + 2 \max_{-1 \leq t, \tau \leq 1} |h(t, \tau)|, \quad i = 3, 4, \dots, N - 4; \quad (9)$$

$$s_i \leq |b(t_0)| \left(\frac{N^2}{32} - \frac{1}{8} \right) + 2 \max_{-1 \leq t, \tau \leq 1} |h(t, \tau)|, \quad i = 0, 1, 2; \quad (10)$$

$$s_i \leq |b(\overline{t_{N-1}})| \left(\frac{N^2}{32} - \frac{1}{8} \right) + 2 \max_{-1 \leq t, \tau \leq 1} |h(t, \tau)|, \quad i = N - 3, N - 2, N - 1. \quad (11)$$

Сопоставив неравенства (9)–(11), приходим к выводу, что если выполняются неравенства

$$\begin{aligned} & |a(\bar{t}_i)| + \frac{N^2}{8} |b(\bar{t}_i)| - \frac{2}{N} \max_{-1 \leq t, \tau \leq 1} |h(t, \tau)| > \\ & > |b(t_0)| \left(\frac{N^2}{32} - \frac{1}{8} \right) + 2 \max_{-1 \leq t, \tau \leq 1} |h(t, \tau)|, \quad i = 0, 1, 2, \end{aligned} \quad (12)$$

$$|a(\bar{t}_i)| + \frac{N^2}{8} |b(\bar{t}_i)| - \frac{2}{N} \max_{-1 \leq t, \tau \leq 1} |h(t, \tau)| >$$

$$> |b(\bar{t}_i)| \left| \left(\frac{N^2}{16} - 1 \right) + 2 \max_{-1 \leq t, \tau \leq 1} |h(t, \tau)| \right|, \quad i = 3, 4, \dots, N-4, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & |a(\bar{t}_i)| + \frac{N^2}{8} |b(\bar{t}_i)| - \frac{2}{N} \max_{-1 \leq t, \tau \leq 1} |h(t, \tau)| > \\ & > |b(\bar{t}_{N-1})| \left| \left(\frac{N^2}{32} - \frac{1}{8} \right) + 2 \max_{-1 \leq t, \tau \leq 1} |h(t, \tau)| \right|, \quad i = N-3, N-2, N-1. \quad (14) \end{aligned}$$

то для матрицы левой части СЛАУ (7) выполняется теорема Адамара об обратимости квадратных матриц, следовательно определитель матрицы отличен от нуля и СЛАУ (7) – однозначно разрешима.

Упростив неравенства (12)–(14), получаем

$$\begin{aligned} |a(\bar{t}_i)| & > \max_{-1 \leq t, \tau \leq 1} |h(t, \tau)| \left(2 + \frac{2}{N} \right) - |b(\bar{t}_i)| \left(\frac{N^2}{16} + 1 \right), \quad 3 \leq i \leq N-4, \\ |a(\bar{t}_i)| & > \max_{-1 \leq t, \tau \leq 1} |h(t, \tau)| \left(2 + \frac{2}{N} \right) - |b(\bar{t}_i)| \left(\frac{3N^2}{32} + \frac{1}{8} \right), \\ & 0 \leq i \leq 2, \quad N-3 \leq i \leq N-1. \end{aligned}$$

Аналогичным образом доказывается разрешимость СЛАУ (7) в случае $\text{sgn}(a(\bar{t}_i)) = \text{sgn}(b(\bar{t}_i))$.

Результаты

Рассмотрим ГИУ с особенностью третьего порядка вида

$$\begin{aligned} -3x(t) + \int_{-1}^1 \frac{x(\tau) d\tau}{(\tau-t)^3} + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x(\tau) d\tau &= \frac{e^{3t} + e^{-2t}}{2} + \\ &+ \frac{4e^3 - 45e^2 - 20e^{-3} + 9e^{-2} + 52}{360}, \quad (15) \end{aligned}$$

Здесь

$$a(t) = -3, \quad b(t) = 1, \quad h(t, \tau) = \frac{1}{2}, \quad f(t) = \frac{e^{3t} + e^{-2t}}{2},$$

а точное решение

$$x(t) = \frac{1}{3} \left(e^{3t} + \frac{e^3 - 1}{15} \right) - \frac{1}{2} \left(e^{-2t} + \frac{1 - e^{-2}}{10} \right). \quad (16)$$

Следуя аналитическому методу сведения ГИУ, установим

$$\int_{-1}^1 \frac{x(\tau)d\tau}{(\tau-t)^3} = \frac{1}{2}x''(t),$$

таким образом, решение уравнения (15) эквивалентно решению интегро-дифференциального уравнения вида

$$x''(t) - 6x(t) + \int_{-1}^1 x(\tau)d\tau = e^{3t} + e^{-2t} + \frac{4e^3 - 45e^2 - 20e^{-3} + 9e^{-2} + 52}{180}. \quad (17)$$

Подстановкой решения (16) уравнения (15) получаем правую часть интегро-дифференциального уравнения (17).

Для получения численных результатов применим описанную выше вычислительную схему к уравнению вида (15). В качестве разбиения интервала $[-1,1]$ используем сетку узлов (6).

Полученные результаты будем сравнивать в промежуточных контрольных точках (табл. 1).

Таблица 1

Результаты приближенного решения при $N = 50$

\bar{t}_i	$x(\bar{t}_i)$	$x_N(\bar{t}_i)$	$ x(\bar{t}_i) - x_N(\bar{t}_i) $
-0,98000	-3,15115	-3,11031	0,04084
-0,94000	-2,87599	-2,85660	0,01939
-0,90000	-2,62153	-2,60365	0,01789
...			
-0,02000	0,17441	0,17479	0,00039
0,02000	0,25444	0,25937	0,00493
...			
0,90000	5,25815	5,26617	0,00802
0,94000	5,89688	5,99231	0,09543
0,98000	6,61574	6,60647	0,00927

Таким образом, численные результаты демонстрируют сходимость вычислительной схемы, а также подтверждают решение, полученное аналитическим методом сведения ГИУ.

Список литературы

1. Hadamard J., Herman A. Lecons sur la propagation des ondes et les equations de l'hydrodynamique. Paris, 1903. 375 p.

2. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М. : Наука, 1978. 352 с.
3. Lifanov I. K. Poltavskii L. N., Vainikko G. M. Hypersingular Integral Equations and their application. London. New York. Washington. : CRC Press, 2004. 396 p.
4. Бойков И. В. Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов : монография. Пенза : Изд-во ПГУ, 2009. 252 с.
5. Boykov I. V., Boykova A. I. Analytical methods for solution of hypersingular and polyhypersingular integral equations arXiv:1901.04880v1 [math.NA] 15 Janury 2019, 22 p.
6. Chan Y-S., Fannjiang A. C., Paulino G. H. Integral equations with hypersingular kernels-theory and applications to fracture mechanics // International Journal of Engineering Science. 2003. № 41. P. 683–720.
7. Чикин Л. А. Особые случаи краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений // Ученые записки Казанского госуниверситета. 1953. Т. 113, № 10. С. 57–105.
8. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М. : Наука, 1977. 640 с.

3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ, ЭКОЛОГИИ, БИОЛОГИИ, ИММУНОЛОГИИ

УДК 378:004

Исследование уравнений реакции-диффузии в экологии, иммунологии и эпидемиологии

Елена Сергеевна Меркушина

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
merkushina.lena12@gmail.com

Аннотация. Рассматриваются системы уравнений реакции-диффузии в экологии и медицине в целях определения, как коэффициенты диффузии влияют на устойчивость систем. Для модели Лотки – Вольтерры, которая описывает конкуренцию двух видов, найдены стационарные решения, при которых система является устойчивой и неустойчивой. Для модели противовирусного иммунного ответа рассмотрены возможные варианты распространения инфекции.

Ключевые слова: уравнения реакции-диффузии, модель Лотки – Вольтерры, устойчивость, особые точки, противовирусный иммунный ответ

Study of reaction-diffusion equations in ecology, immunology and epidemiology

Elena S. Merkushina

Penza State University, Penza, Russia
merkushina.lena12@gmail.com

Abstract. The systems of reaction-diffusion in ecology and medicine are considered in order to determine how the diffusion coefficients influence the stability of systems. For the Lotka – Volterra model, which is a competition of two types, stationary solutions are found for which the system is stable and unstable. Possible variants of the spread of infection are considered for the model of the antiviral immune system.

Keywords: reaction-diffusion equations, Lotka – Volterra model, stability, singular points, antiviral immune response.

Введение

В последние десятилетия появился значительный интерес к многокомпонентным системам уравнений реакции-диффузии. Такие системы

используются при описании возникновения и эволюции пространственно-временных структур в нелинейных средах различной природы.

Уравнения диффузии представляют собой частный вид дифференциальных уравнений в частных производных. С помощью данных уравнений выявляется зависимость концентрации вещества (или иных объектов) от пространственных координат и времени, причем задан коэффициент, характеризующий проницаемость среды для диффузии.

Уравнения реакции-диффузии в экологии

Рассмотрим систему двух дифференциальных уравнений, которая описывает два взаимодействующих вида популяции. Каждый вид перемещается из мест с более высокой концентрацией в более низкую, и они взаимодействуют друг с другом в отношениях «хищник-жертва» [1,2,3].

Будем рассматривать пространство Лебега $L^\infty(\Omega)$, где Ω – некоторое измеримое пространство (в данном случае ареал) и $\Omega \times (0, \infty)$.

Для описания конкуренции видов возьмем модель Лотки-Вольтерры. Тогда система уравнений для описания пространственно-временной численности популяций примет вид:

$$\begin{cases} u_t = d_1 \Delta u + u(a_1(x) - b_1(x)u - c_1(x)v), \\ v_t = d_2 \Delta v + v(a_2(x) - b_2(x)u - c_2(x)v), \end{cases} \quad (1)$$

при условиях

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} = 0, \quad \text{на границе } \partial\Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, \quad v(x, 0) = v_0(x) \geq 0, \end{aligned}$$

здесь d_1 и d_2 – коэффициенты диффузии ($d_1, d_2 > 0$); a_i – коэффициенты собственной скорости роста видов; b_2 и c_1 – коэффициенты, описывающие типы взаимодействия; c_2 и b_1 – коэффициенты внутривидовой конкуренции ($a_i, b_i, c_i > 0$).

Рассмотрим случай, когда коэффициенты диффузии больше единицы. Тогда система (1) будет вести себя иначе:

$$\begin{cases} \frac{d\hat{U}}{dt} = \hat{U}(a_1 - b_1\hat{U} - c_1\hat{V}), \\ \frac{d\hat{V}}{dt} = \hat{V}(a_2 - b_2\hat{U} - c_2\hat{V}), \end{cases}$$

Теорема 1. Если выполняется:

$$\frac{\overline{b_1}}{b_2} > \frac{\overline{a_1}}{a_2} > \frac{\overline{c_1}}{c_2}, \text{ при любых значениях } x \in \overline{\Omega},$$

и коэффициенты d_1 и d_2 достаточно велики, то система (1) имеет положительное установившееся состояние, обозначаемое (\tilde{U}, \tilde{V}) , которое глобально асимптотически устойчиво, а также имеет место следующее выражение:

$$\lim_{d_1, d_2 \rightarrow \infty} (\tilde{U}(x), \tilde{V}(x)) = \left(\frac{\overline{a_2 c_1} - \overline{a_1 c_2}}{\overline{b_2 c_1} - \overline{b_1 c_2}}, \frac{\overline{a_2 b_1} - \overline{a_1 b_2}}{\overline{b_2 c_1} - \overline{b_1 c_2}} \right).$$

Теперь рассмотрим случай, когда коэффициенты диффузии меньше единицы. Тогда поведение системы (1) будет представлено в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{d\hat{U}}{dt} = \hat{U}(a_1(x) - b_1(x)\hat{U} - c_1(x)\hat{V}), \\ \frac{d\hat{V}}{dt} = \hat{V}(a_2(x) - b_2(x)\hat{U} - c_2(x)\hat{V}), \end{cases}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{U}, \hat{V}) = (u^*, v^*)$$

Теорема 2. Предположим, что между видами существует слабая конкуренция. Если d_1 и d_2 достаточно малы, то система (1) имеет уникальное положительное устойчивое состояние (\tilde{U}, \tilde{V}) , которое является глобально асимптотически устойчивым. Более того,

$$\lim_{d_1, d_2 \rightarrow \infty} (\tilde{U}, \tilde{V}) = (u^*, v^*).$$

Равновесие сосуществования видов для системы (1) существует тогда и только тогда, когда $(1 - c_1(x))(1 - b_2(x)) > 0$. Это возможно, если оба параметра $c_1(x)$ и $b_2(x)$ больше единицы (неустойчивое состояние) или меньше (устойчивое состояние).

Приравняв коэффициенты диффузии нулю, получим возможные состояния системы:

– $(0, 0)$. В этом случае оба вида вымирают.

– $\left(0, \frac{a_2}{c_2}\right) u \left(\frac{a_1}{b_1}, 0\right)$ Здесь один из видов продолжает существование,

а другой вымирает.

– $\left(\frac{c_1 a_2 - a_1 c_2}{c_1 b_2 - c_2 b_1}, \frac{b_2 a_1 - a_2 b_1}{b_2 c_1 - b_1 c_2} \right)$. Данное состояние соответствует состоянию равновесия и обозначается как (u^*, v^*) .

Якобиан для системы (1) имеет вид:

$$J(u, v) = \begin{pmatrix} a_1(x) - 2ub_1(x) - vc_1(x) & -uc_1(x) \\ -vb_2(x) & a_2(x) - ub_2(x) - 2vc_2(x) \end{pmatrix} \quad (2)$$

Подставив значения u и v в определитель матрицы (2), видно, что состояние (u^*, v^*) является устойчивым, а остальные состояния – неустойчивыми. Причем определитель не будет равняться нулю при оценке любого из четырех состояний.

Собственные значения λ_1 и λ_2 можно найти из матрицы Якоби:

$$\begin{pmatrix} a_1 - 2ub_1 - vc_1 - \lambda & -uc_1 \\ -vb_2 & a_2 - ub_2 - 2vc_2 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение в данном случае примет вид:

$$(a_1 - 2ub_1 - vc_1 - \lambda)(a_2 - ub_2 - 2vc_2 - \lambda) - vb_2uc_1 = 0.$$

После подстановки в уравнение всех необходимых данных находятся числа λ_1 и λ_2 . На основе полученных значений делается вывод, к какому типу особых точек относится данная точка.

Если матрица A является невырожденной, то различают четыре типа точек равновесия [4]:

1. Если λ_1, λ_2 – действительные числа одного знака ($\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$), то точка равновесия – *узел*.

2. Если λ_1, λ_2 – действительные числа разного знака ($\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$), то точка равновесия – *седло*. Так как одно из собственных значений является положительным, то седло – неустойчивая точка равновесия.

3. Если λ_1, λ_2 – комплексные числа, действительные части равны и отличны от нуля ($Re\lambda_1 = Re\lambda_2 \neq 0$), то точка равновесия – *фокус*.

4. Если λ_1, λ_2 – чисто мнимые числа ($Re\lambda_1 = Re\lambda_2 = 0$), то точка равновесия – *центр*. Положения равновесия данного типа являются устойчивыми по Ляпунову.

Рассмотрим в качестве примера задачу:

$$u(x, 0) = x^3 + 1, v(x, 0) = 4x^2.$$

$$b_1 = 0.6, b_2 = 0.2, a_1 = 0.4, a_2 = 0.2, c_1 = 0.1, c_2 = 0.1, d_1 = 1.1, d_2 = 1.4.$$

Тогда система (1) принимает вид:

$$\begin{cases} u_t = 6xd_1 + (x^3 + 1)(a_1 - b_1(x^3 + 1) - 4x^2c_1), \\ v_t = 8d_2 + 4x^2(a_2 - b_2(x^3 + 1) - 4x^2c_2), \end{cases} \quad (3)$$

График для системы (3) представлен на рис. 1.

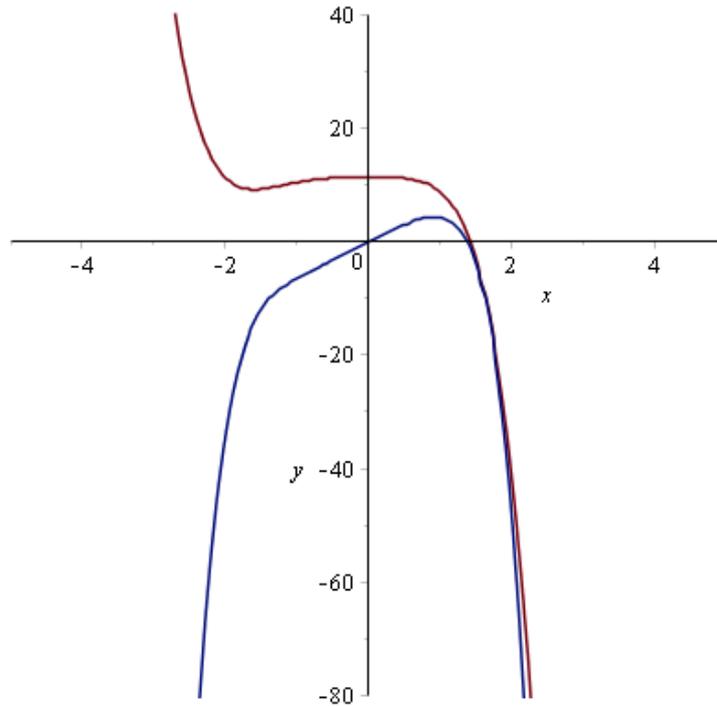


Рис. 1. График для системы уравнений (3)

Получили состояние равновесия $(u^*, v^*) = (0.5; 1)$.

Определитель Якобиана $J(u^*, v^*)$ равняется -0.02 , что указывает на то, что состояние является устойчивым.

Собственные числа $\lambda_1 = -0.05857864376$ и $\lambda_2 = -0.3414213562$ являются действительными числами одного знака, значит особая точка – узел. Из того, что оба значения отрицательны, следует, что узел является устойчивым.

Уравнения реакции-диффузии в иммунологии и медицине

Теперь рассмотрим систему ОДУ модели противовирусного иммунного ответа [5]:

$$\frac{dv}{dt} = kv(1-v) - cv, \quad k = \text{const}, k > 0, \quad (4)$$

$$\frac{dc}{dt} = \varphi(v_\tau)c(1-c) - \psi(v_\tau)c, \quad v_\tau = v(t-\tau), \quad (5)$$

где v – концентрация вируса в организме; c – концентрация иммунных клеток; $\varphi(v_\tau)$ – функция, описывающая клональную экспансию иммунных клеток; $\psi(v_\tau)$ – функция, определяющая смертность иммунных клеток; τ – время запаздывания.

Первый член уравнения (4) описывает репродукцию вируса, а второй определяет темп устранения вируса иммунными клетками. Уравнение (5) описывает новообразование иммунных клеток. Следует заметить, что этот процесс зависит также от концентрации вируса, потому что иммунный ответ прямо пропорционально зависит от концентрации вируса в организме.

Расширенная система уравнений реакции-диффузии с запаздыванием, описывается следующим образом:

$$\frac{dv}{dt} = D_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + kv(1-v) - cv,$$
$$\frac{dc}{dt} = D_2 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \varphi(v_\tau)c(1-c) - \psi(v_\tau)c .$$

Решения данной системы зависят от размера популяции и темпа размножения вируса.

После введения в орган-мишень пространственной локализованной вирусной популяции наблюдается два варианта распространения инфекции. В первой ситуации за пиком инфекции сразу же следуют иммунные клетки, которые полностью уничтожают инфекцию. Иммунные клетки, оставшиеся после выведения инфекции из организма, в дальнейшем будут обеспечивать иммунный ответ при повторных заражениях. В другом случае пик иммунных клеток сопровождается инфекцией более высокого уровня, что приводит к истощению иммунных клеток и развитию хронической инфекции.

Список литературы

1. Leung A. K. Nonlinear systems of partial differential equations. USA, University of Chicinnati, Mathematics and its applications. 2009. 531 с.
2. Lou Y. Diffusion and Advection: some PDE models in Spatial Ecology. USA: The Ohio State University, Center for PDE, ECNU, The Ohio State University. 2013. 74 с.
3. Bianchi A. The dynamics of biological systems. CHE : Mathematics subject classification, 2010. 265 с.
4. Панин А. А. Классификация точек покоя двумерных линейных однородных систем дифференциальных уравнений первого порядка: учеб. пособие. М. : Физический факультет МГУ, 2012. 29 с.
5. Тарасевич А. Л., Бочаров Г. А., Вольперт В. А. Уравнения реакции-диффузии в иммунологии // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2018. № 12. С. 1–12.

Оптимизации уровня потребления экономического предприятия

Татьяна Фанадовна Мамедова¹, Анна Дмитриевна Ювкина²

^{1,2} Национальный исследовательский Мордовский государственный
университет имени Н. П. Огарева, Саранск, Россия
¹mamedovatf@yandex.ru, ²jak.69@mail.ru

Аннотация. Рассматривается вопрос оптимизации уровня потребления для экономического объекта на примере конкретного предприятия. На основе принципа максимума решена задача оптимизации сбережений. Получены оптимальные траектории потребления и капиталовооруженности.

Ключевые слова: оптимизация, потребление, производственная функция, капиталовооруженность

Optimization of the consumption level of an economic enterprise

Tat'yana F. Mamedova¹, Anna D. Yuvkina²

^{1,2}Ogarev Mordovia State University, Saransk, Russia
¹mamedovatf@yandex.ru, ²jak.69@mail.ru

Abstract. The issue of optimization of the level of consumption for an economic object is considered on the example of a specific enterprise. On the basis of the maximum principle, the problem of savings optimization is solved. The optimal trajectories of consumption and capital-labor ratio are obtained.

Keywords: optimization, consumption, production function, capital-labor ratio

Введение

Актуальность проблемы обусловлена тем, что в современной экономике каждому предприятию для достижения хороших результатов своей деятельности необходимо применять методы математического моделирования. Наиболее часто в этих целях используются оптимизационные методы, составляющие основу математического программирования [1].

Постановка задачи

Предположим, что имеются данные за некоторый период о выручке от продажи сельскохозяйственной продукции, о среднегодовой стоимости основных средств и о численности персонала. Требуется оптимизировать уровень потребления сельскохозяйственного предприятия, которое занимается выработкой молочной продукции.

Задача о выборе оптимальных траекторий потребления и капиталовооруженности $c(t)$, $k(t)$, для которых благосостояние максимально, имеет следующий вид [2]:

$$J(c) = \int_{t_1}^{t_2} e^{-\delta(t-t_1)} U(c(t)) dt \rightarrow \max,$$

$$\frac{dk}{dt} = f(k) - \lambda k - c,$$

$$k(t_1) = k_1, 0 \leq c(t) \leq f(k),$$

где k_1, λ, δ – заданные числа, а $f(k), U(c)$ – заданные функции.

Решением задачи оптимизации является траектория потребления на единицу эффективного труда $\{c(t)\}$ и траектория капиталовооруженности эффективного труда $\{k(t)\}$, вдоль которых, функционал $J(c)$ достигает максимума. Решение задачи зависит от двух функций: функции полезности U и производственной функции $f(k)$, от трех параметров: нормы дисконтирования, нормы амортизации, темпа рабочей силы и от начального значения капиталовооруженности рабочего.

Применим следующий алгоритма решения задачи:

- 1) Построение производственной функция $f(k)$ на основе данных о динамике выпуска продукции и производственных факторах (капитал, труд);
- 2) Выбор функции полезности $U(c)$;
- 3) Вычисление точки равновесия (k^*, c^*) , соответствующей сбалансированному росту;
- 4) Решение системы дифференциальных уравнений;
- 5) Построение траекторий потребления и капиталовооруженности;
- 6) Вычисление значения функционала, для нахождения оптимального уровня потребления.

На основе исходных данных (таблицы 1) была построена производственная функция, которая характеризует объем выпуска продукции, величина которого зависит от затрат факторов производства.

Производственная функция $y = f(k)$ должна удовлетворять условиям [3]:

$$f(k) > 0, f'(k) > 0, f''(k) < 0 \forall k > 0, f(0) = 0, f'(0) = \infty.$$

Производственная функция имеет вид:

$$y = 1506,1k^{0,123}. \tag{1}$$

Экономические показатели предприятия

Год	Выручка от продажи сельскохозяйственной продукции, тыс. руб., Y	Среднегодовая стоимость основных средств, тыс. руб., K	Численность персонала, L
2004	843750	195000	533
2005	860625	210000	540
2006	904500	240000	530
2007	968625	270000	597
2008	995625	285000	543
2009	1046250	288000	535
2010	1113750	300000	570
2011	1181250	330000	600
2012	1215000	360000	615
2013	12048750	375000	630
2014	1282500	382500	628
2015	1333125	390000	637
2016	1390601	409590	676
2017	1380500	410000	650
2018	1367218	405967	670

Эта функция удовлетворяет условиям:

$$f(k) = 1506,1k^{0,123} > 0,$$

$$f'(k) = 185,2503k^{-0,877} > 0,$$

$$f''(k) = -162,4645k^{-1,877} < 0,$$

$$f(0) = 1506,1 * 0^{0,123} = 0, \quad f'(0) = 185,2503 * 0^{-0,877} = \infty.$$

Пусть функция полезности имеет вид:

$$U(c) = \sqrt[3]{c}, \quad (2)$$

где $c(t)$ – потребление, которое приходится на одну рабочую единицу.

Данная функция так же удовлетворяет требуемым условиям:

$$U(c) = \sqrt[3]{c} > 0,$$

$$U'(c) = \frac{1}{3\sqrt[3]{c^2}} > 0, \quad U''(c) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{c^5}} < 0,$$

$$U'(0) = \frac{1}{3\sqrt[3]{0}} = \infty.$$

Пусть заданы начальные условия: $t_1 = 0, t_2 = 14$. Коэффициент амортизации капитала $\mu = 0,06$. Годовой темп прироста числа занятых на предприятии $n = 0,016$. Норма дисконтирования $\delta = 0,5$.

Получено, что стационарные траектории $c^* = \text{const}, k^* = \text{const}$.

Найдем k^* из уравнения: $f'(k^*) = \mu + n + \delta$:

$$185,2503k^{*-0,877} = 0,06 + 0,016 + 0,5,$$

$$k^* = 722,76.$$

Вычислим $c^* = f(k^*) - (\mu + n)k^*$.

$$c^* = 1506,1 * 722,76^{0,123} - (0,06 + 0,016) * 722,76$$

$$c^* = 3329,69.$$

Величины k^*, c^* удовлетворяют неравенству: $0 < c^* < f(k^*)$. Точка равновесия (k^*, c^*) является траекторией сбалансированного роста.

Вычислим значение функционала $J(c)$:

$$\begin{aligned} J(c) &= \int_0^{14} e^{-0,5(t-0)} * \sqrt[3]{3329,69} dt = 14,9 \int_0^{14} e^{-0,5t} dt = \\ &= 14,9 \left(-\frac{1}{0,5} e^{-7} + \frac{1}{0,5} e^0 \right) = 29,84. \end{aligned}$$

Найдем решение системы дифференциальных уравнений с параметрами:

$$\mu = 0,06, n = 0,016, \delta = 0,5.$$

$$\begin{cases} \dot{c} = \frac{1}{\sigma(c)} (f'(k) - \mu - n - \delta)c, \\ \dot{k} = f(k) - (\mu + n)k - c. \end{cases} \quad (3)$$

Для решения системы (3) был выбран метод Рунге-Кутты 4-го порядка.

Получено, что оба показателя имеют тенденцию роста, но потребление растет значительно быстрее, чем капиталовооруженность. Значение функционала $J(c) = 29,84$.

График траектории потребления на рисунке 1 изображен линией зеленого цвета, график капиталовооруженности – линией синего цвета.

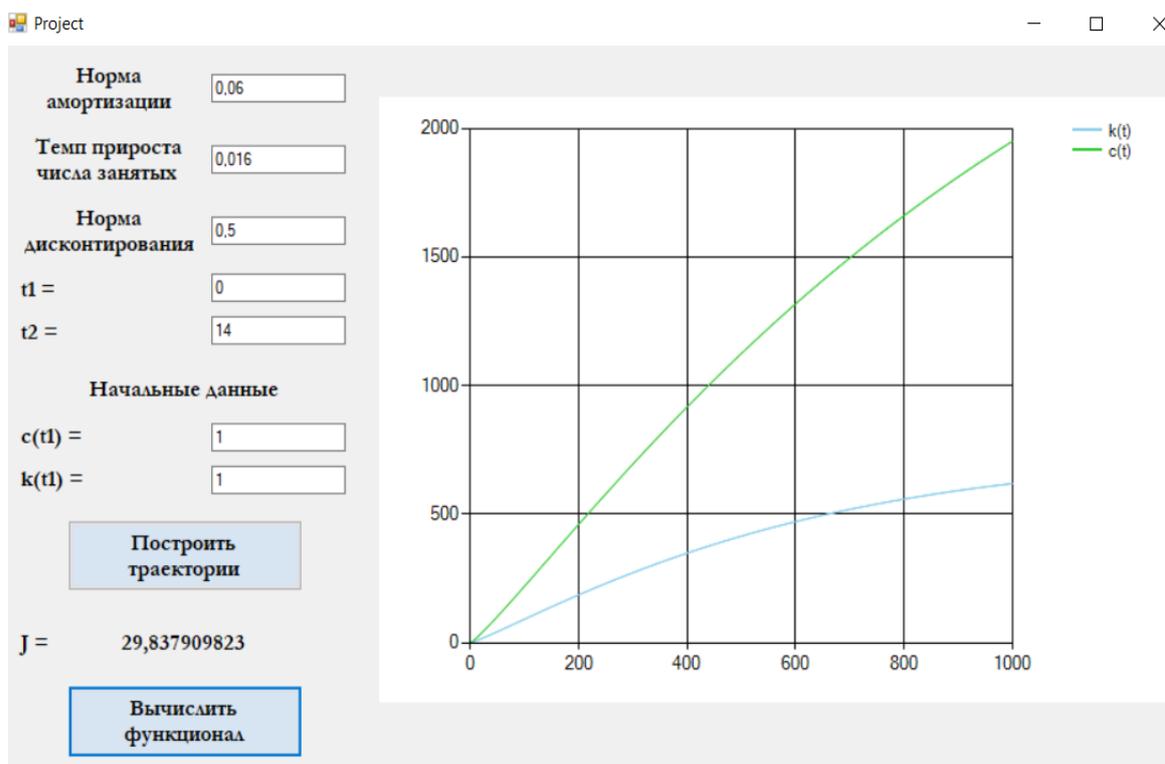


Рис. 1. Траектории потребления и капиталовооруженности

Увеличив коэффициент амортизации μ до 0,3 и, решив систему уравнений (3) с параметрами $\mu = 0,03$, $n = 0,016$, $\delta = 0,5$, получили значение функционала $J(c) = 29,04$.

Полученные результаты показывают, что увеличение коэффициента амортизации капитала незначительно замедляет рост потребления и капиталовооруженности. Только в случае уменьшения уровня инфляции можно добиться роста капиталовооруженности.

Затем модель была исследована при уменьшении нормы дисконтирования. Начальные условия: $t_1 = 0, t_2 = 14$, $\mu = 0,06$, $n = 0,016$, $\delta = 0,03$.

При данных параметрах было получено значение функционала $J(c) = 180,14$, что говорит о том, что в данной ситуации наблюдается рост как траектории потребления на единицу эффективного труда, так и траектории капиталовооруженности эффективного труда. Следовательно, уменьшение нормы амортизации увеличивает скорость роста обеих величин, что говорит о важности долгосрочного планирования.

Заключение

В результате проделанной работы поставленная цель была достигнута, а именно: разработана экономико-математическая модель и выполнена оптимизация уровня потребления для экономического объекта. Получены оптимальные траектории потребления и капиталовооружен-

ности. Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод о том, что максимизация потребления происходит в том случае, когда норма дисконтирования будет минимальной.

Список литературы

1. Андреева Е. А. Вариационное исчисление и методы оптимизации: учеб. пособие. Тверь: Твер. гос. ун-т, 2001. 576 с.
2. Ашманов С. А. Введение в математическую экономику: учеб. пособие. М. : Наука, 1984. 296 с.
3. Мамедова Т. Ф., Каледин О. Е. [и др.]. Математическая модель оптимизации управления хозяйственной деятельностью одного производственного предприятия // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем: сб. ст. X Междунар. науч.-техн. конф. (г. Пенза, 28–30 октября 2015 г.) / под ред. И. В. Бойкова. Пенза: Изд-во ПГУ, 2016. С. 125–130.

4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ФИЗИКЕ И ТЕХНОЛОГИЯХ

УДК 621.396

Анализ информативных признаков цели с использованием адаптивных порогов

Юлия Фридриховна Захарова¹, Анастасия Александровна Козина²

^{1,2} Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹olegzakharov@rambler.ru, ² akozinowa@yandex.ru

Аннотация. Представлен общий обзор способа определения основных информативных параметров из сигнала с линейной частотной модуляцией. Целью такой обработки сигнала является обнаружение нарушителя в охраняемом периметре с помощью технического средства охраны. Выявления объекта предлагается с использованием алгоритма адаптивного порога. Пороги были построены по методам CA-CFAR и OS-CFAR. Алгоритмы применили к реальному сигналу и полученные результаты продемонстрировали на графиках.

Ключевые слова: радиолучевое техническое средство охраны, адаптивный порог, дискретное преобразование Фурье, линейная частотная модуляция

Analysis of informative target features using adaptive thresholds

Yuliya F. Zakharova¹, Anastasiya A. Kozinova²

^{1,2} Penza State University, Penza, Russia

¹olegzakharov@rambler.ru, ² akozinowa@yandex.ru

Abstract. The article offers a general overview of the method for determining the main informative parameters from a chirp signal. The purpose of this signal processing is to detect the intruder in the protected perimeter using technical security equipment. Object detection is proposed using an adaptive threshold algorithm. The thresholds were constructed using the CA-CFAR and OS-CFAR methods. The algorithms were applied to a real signal and the results were shown on the graphs.

Keywords: radio-beam technical means of protection, adaptive threshold, discrete Fourier transform, linear frequency modulation

В настоящее время все более актуальной становится защита стратегически важных объектов от проникновения нарушителей и предотвращения террористических актов. Среди многообразия средств, обеспечивающих защиту объектов можно особо выделить технические сред-

ства охраны, которые фиксируют проникновение нарушителя в зону обнаружения (ЗО) и формируют сигнал тревоги.

Для анализа было выбрано однопозиционное радиолучевое техническое средство охраны (РЛТСО), которое формирует зону обнаружения (рисунок 1) путем зондирования пространства ВЧ сигналом с линейной частотной модуляцией. Объектом обнаружения устройства является человек.

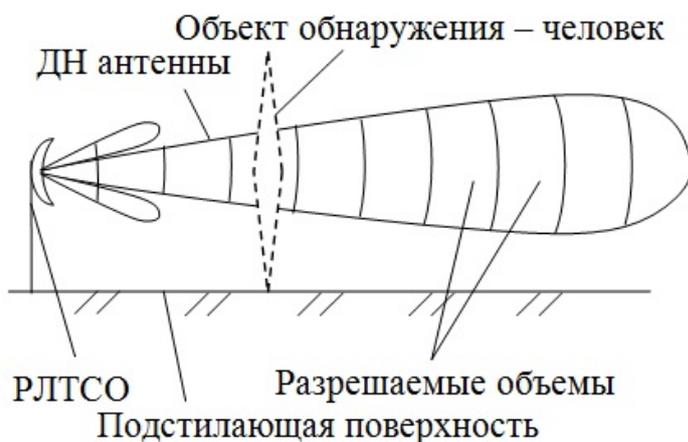


Рисунок 1

Целью работы является определение информативных признаков в сигнале, отраженном от объекта для определения наличия нарушителя в ЗО и оценки расстояния до него. Обработка начинается с оцифровки принятого сигнала с помощью аналого-цифрового преобразователя микроконтроллера. После формируется массив для анализа данных, который состоит из сегментов обработки. Размерность массива отсчетов определяем, как:

$$N = \frac{f_d}{\Delta f},$$

где f_d – частота дискретизации, Δf – ширина сегмента.

Следующим этапом обработки является переход из временной области в частотную, в каждом сегменте используя дискретное преобразование Фурье. Затем в каждом сегменте осуществляется выделение составляющих основного канала, отвечающего за тангенциальное направление движения и двух субканалов – радиальное направление движения. Оценка рассматриваемых процессов производится математическим ожиданием и дисперсией. После преобразования производится объединение всех характеристик по каждому каналу и для всего записанного сигнала получаем следующий результат (рисунок 2). На рисунке 2 по горизонтали указаны номера обрабатываемого сегмента.

Основная задача обработки сигнала в РЛТСО – это корректно определить в какие именно моменты появился нарушитель в ЗО. Так как иногда может возникать ложная тревога, когда появляется ошибочное решение об обнаружении радиолокационной цели, вызванное влиянием шумов или других помеховых сигналов, превысивших порог обнаружения. В общем случае, ложная тревога – это ситуация, когда отображается наличие цели в то время как в действительности цели нет. Поэтому не всегда фиксированный порог в такой ситуации подходит. Предлагается применять адаптивный порог. Он настраивается для каждой ячейки в соответствии с предполагаемым уровнем сигнала, который определяется путем обработки группы контрольных ячеек, окружающих исследуемую ячейку.

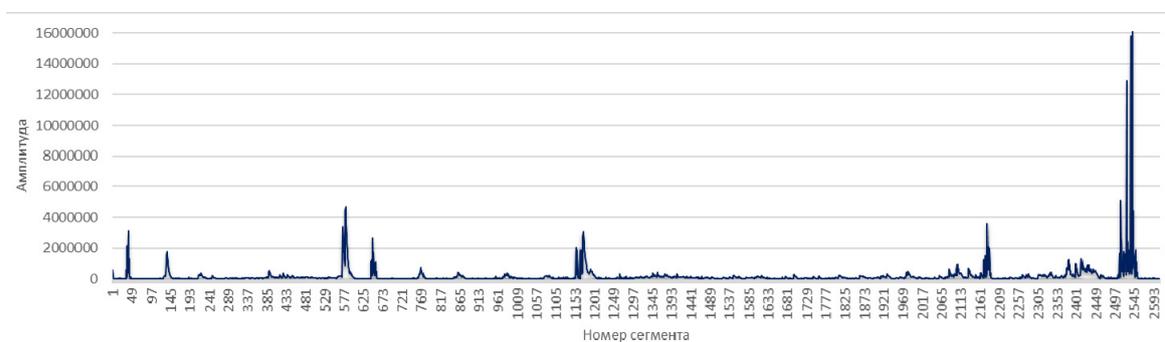


Рисунок 2

Для создания адаптивного порога можно использовать специально созданные алгоритмы CFAR. Например, CA- или OS-CFAR являются наиболее широко используемыми среди методов CFAR. Рассмотрим каждый более подробно.

Алгоритм CA-CFAR

Тестируемая ячейка Y объявляется целью, если ее значение превышает пороговое значение. В этом алгоритме адаптивный порог – это среднее арифметическое его опорных ячеек:

$$Z = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n X_i$$

Подробная схема метода представлена на рисунке 3.

Основным недостатком такого алгоритма является серьезное снижение производительности при большом количестве мешающих «целей».

Результаты применения алгоритма *CA-CFAR* на исследуемом сигнале продемонстрированы на рисунке 4. Синей линией изображены контрольные значения по всему исходному сигналу (максимальное значе-

ние среди всех трех каналов обработки), а красной показан адаптивный порог. На рисунке вертикальные полосы – это моменты появления нарушителя, если использовать данный алгоритм.

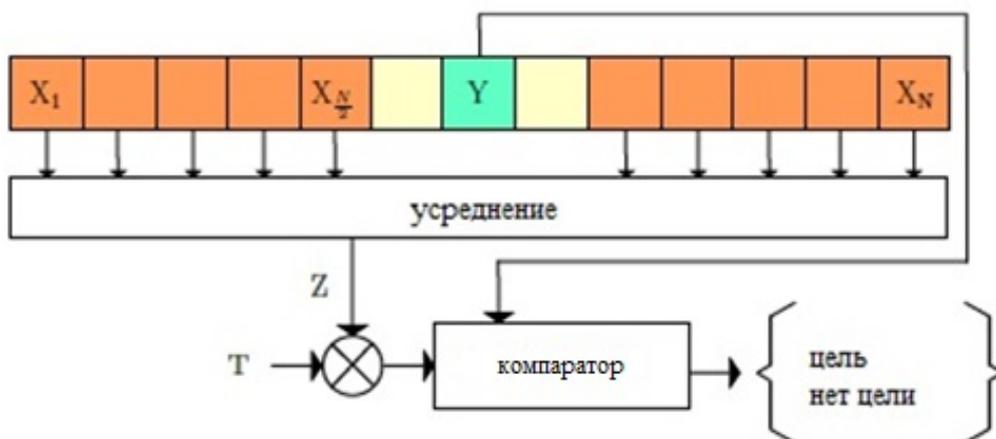


Рисунок 3

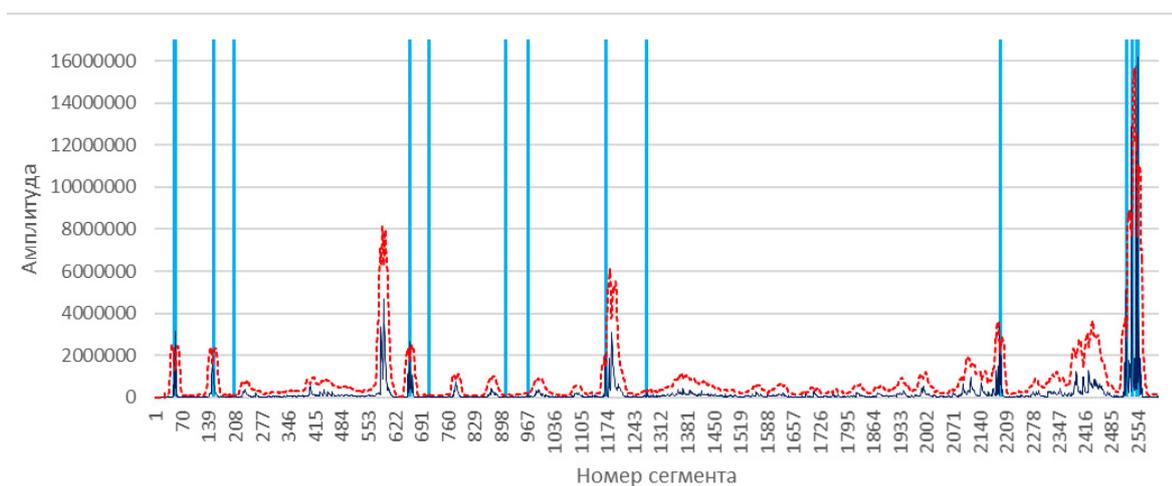


Рисунок 4

Алгоритм OS-CFAR

Сначала выходные данные всех ячеек эталонного диапазона ранжируют в порядке возрастания в соответствии с их величинами следующим образом:

Шаг 1: Сортировка образцов справочного окна;

$$X_1 \leq X_2 \leq \dots \leq X_k \leq \dots \leq X_N$$

Шаг 2: Вычисление соответствующей теоретической информации критерия для отсортированного окна;

Шаг 3: Оценка оптимального порядка для детектора OS-CFAR

X_k ; (В соответствии с [1] $k = \frac{3N}{4}$, так, например, при $N = 20$ $k = 15$)

Шаг 4: Выбор соответствующего масштабного коэффициента и вычисление порогового уровня.

$$TZ = T_{OS} \cdot X_k$$

Шаг 5: Тестируемая ячейка сравнивается с полученным порогом и по результатам тестов принимается решение:

$$H_1 : Y \geq TZ$$

$$H_0 : Y < TZ$$

Гипотеза H_1 означает наличие цели в тестовой ячейке, а H_0 означает, что цели нет. Схема данного алгоритма представлена на рисунке 5.

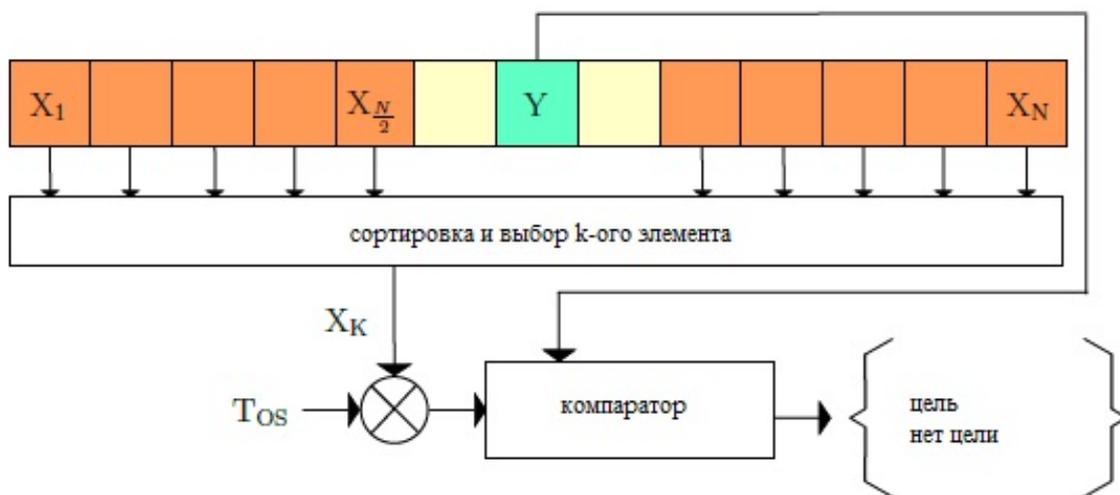


Рисунок 5

Достоинством метода OS-CFAR является большая эффективность определения порога обнаружения. Основным недостатком метода является необходимость больших вычислительных ресурсов, требуемых для выполнения алгоритмов сортировки.

Также применение OS-CFAR на исходном сигнале продемонстрировано на рисунке 6.

Но остается вопрос о выборе коэффициента масштабирования T . В рассмотренных алгоритмах значение T зависит от количества выбранных значений вспомогательного окна и вероятности ложной тревоги. Подробное описание выбора данного коэффициента продемонстрировано в работе [2].

В данной статье кратко описаны несколько способов обработки сигнала в однопозиционном РЛТСО для принятия решения о наличии цели в ЗО, позволяющие существенно повысить достоверность получаемой информации.

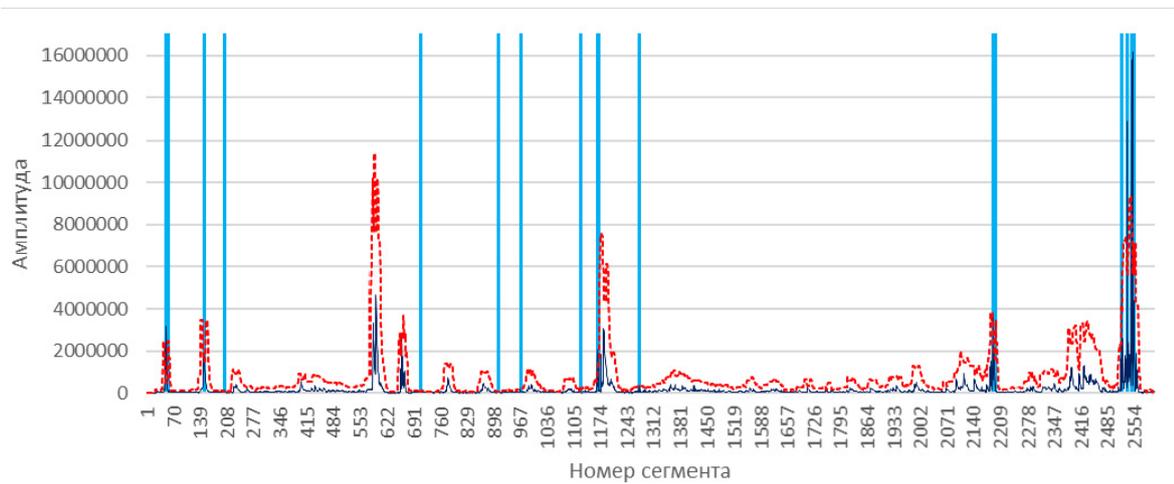


Рисунок 6

Список литературы

1. Habib M. A., Barkat M. [et al.]. CA-CFAR detection performance of radar targets embedded in "non centred Chi-2 Gamma" clutter // Progress In Electromagnetics Research. 2008. № 88. P. 135–148.
2. Nathanson F. E., Reilly J. P., Cohen M. N. Radar design principles signal processing and the environment. New York : McGraw-Hill Book Co, 1991.
3. Rohling H. Ordered statistic CFAR technique – an overview // Proc. of the 12th International Radar Symposium (IRS). 2011. P. 631–638.
4. Сосулин Ю. Г. Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов. М. : Советское радио, 1978. 320 с.

Постановка и решение двухкритериальной задачи о назначении целей

Игорь Павлович Демидчик¹, Петр Петрович Макарычев²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹dema@yandex.ru, ²makpp@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается проблема формализованной постановки неканонической задачи о назначении целей средствам поражения неоднородной группировки. Постановка задачи учитывает различия в типах средств поражения, количестве функционирующих целевых каналов средств поражения, а также зависимость вероятности поражения от типа воздушной цели, участвующих в налете. Решение осуществляется методом целочисленного программирования. Целевая функция формируется с использованием мультипликативного критерия оптимальности назначения, приоритетности целей. Ограничения формируются с учетом общего количества целей и количества функционирующих целевых каналов в каждом средстве поражения.

Ключевые слова: назначение целей, двухкритериальная оптимизация, целочисленное программирование

Setting and solving a two-criteria goal assignment problem

Igor' P. Demidchik¹, Petr P. Makarychev²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹dema@yandex.ru, ²makpp@yandex.ru

Abstract. The problem of the formalized formulation of the non-canonical problem of assigning targets to the means of destruction of a heterogeneous grouping is considered. The problem statement takes into account the differences in the types of weapons of destruction, the number of functioning target channels of weapons of destruction, as well as the dependence of the probability of defeat on the type of air target involved in the raid. The solution is carried out by the method of integer programming. The objective function is formed using the multiplicative criterion of optimal assignment, priority of goals. Restrictions are formed taking into account the total number of targets and the number of functioning target channels in each means of destruction.

Keywords: goal assignment, two-criteria optimization, integer programming

Введение

Задача о назначении целей является одной из фундаментальных задач математического программирования. Эта задача имеет большое прикладное значение и используется в различных областях человеческой

деятельности, в том числе и в военном деле. Существует подход к решению задачи о назначениях целей, основанный на сведении задачи к простейшей линейной модели о назначениях [1, 2]. Поскольку множество прикладных задач о назначениях не соответствуют простейшей линейной задаче, то предложены решения с учетом дополнительных условий (ограничений). Первый подход предполагает разработку разнообразных моделей с учетом конкретных дополнительных условий. Вторым подходом основан на сведении задачи с дополнительными условиями к простейшей (канонической) задаче, который можно успешно использовать и при решении задач о назначении целей [3, 4, 5]. В данной работе рассматривается постановка и решение двухкритериальной задачи о назначении целей. Постановка двухкритериальной задачи осуществляется в виде канонической задачи о назначениях целей. Под канонической задачей о назначении целей в данной статье понимается простейшая задача, в которой назначение целей однородным средствам поражения выполняется по единственному критерию.

Постановка задачи

Предположим, что в распоряжении группировки ПВО имеется n средств поражения воздушных целей, каждое из которых имеет h целевых каналов. В воздушном налете участвуют два типа воздушных целей. При решении задачи количество назначаемых целей не превышает общего количества целевых каналов, находящихся в готовности к отражению воздушного налета (см. таблицу 1). Вероятность поражения целей определяется как типом цели, так и типом средства поражения [6, 7].

Таблица 1

Зависимость вероятности от типа цели и средства поражения

ТТип цели	Количество целей	Средства поражения			
		Тип средства 1		Тип средства 2	
		Вероятность поражения	Количество целевых каналов	Вероятность поражения	Количество целевых каналов
I	n_1	$p_{1,1}$	h_1	$p_{1,2}$	h_2
II	n_2	$p_{2,1}$		$p_{2,2}$	

При решении задачи принимается, что количество целей не превышает количество целевых каналов, находящихся в готовности: $(n_1 + n_2) \leq (h_1 + h_2)$.

В качестве критерия качества назначения целей средствам поражения формируется мультипликативный критерий качества назначения целей следующего вида:

$$k_{j,i} = t_{j,1}(1 - p_{j,i}), \quad j = \overline{1, n_{\max}}, \quad i = \overline{1, m_{\max}} \quad (1)$$

где $t_{j,i}$ – подлетное время воздушной цели c_i к средству поражения s_j , вероятность поражения цели c_i средством s_j .

В качестве метода решения задачи о назначениях может быть использован метод дискретного линейного программирования [5].

Решение задачи

Для решения задачи сформируем целевую функцию следующего вида:

$$F(K, X) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m k_{j,i} x_{i,j} \rightarrow \min,$$

где $x_{j,i} \in \{0,1\}$ – элементы матрицы назначений целей X средствам поражения: значение элемента матрицы $x_{j,i} = 1$ соответствует назначению цели c_i средству поражения s_j .

Начальные значения элементов матрицы при решении задачи задаются следующим образом: $X = [x_{i,j} = 0, i = \overline{1, m_{\max}}, j = \overline{1, n_{\max}}]$,

Ограничения при решении задачи характеризуют сложившуюся обстановку. Предполагается, что каждая сопровождаемая средствами обнаружения воздушная цель назначается одному средству поражения:

$$\sum_{j=1}^{n_{\max}} x_{i,j} = 1.$$

Каждому средству поражения назначается количество целей, которое не превышает количество целевых каналов, находящихся в боевой готовности:

$$\sum_{i=1}^{m_{\max}} x_{i,j} \leq h_j, \quad j = \overline{1, n}, h_j \in \{h_1, h_2\};$$

Результаты решения задачи

На основе значений координат и скорости полета воздушных целей в очередном цикле управления формируется матрица мультипликативного критерия (1) размерности $n \times m$: При значениях $n = 4, m = 16$ матрица критерия назначения целей имеет вид:

$$K = \begin{bmatrix} 0,5 & 9,1 & 5,1 & 6,7 & \dots & 15,6 & 18,3 & 17,4 & 18,9 \\ 0,7 & 9,9 & 4,9 & 6,3 & \dots & 18,3 & 21,9 & 18,6 & 17,1 \\ 26,1 & 4,5 & 26,7 & 25,2 & \dots & 4,9 & 6,5 & 8,9 & 8,4 \\ 20,7 & 3,9 & 29,7 & 23,7 & \dots & 5,5 & 7,1 & 9,9 & 7,3 \end{bmatrix}$$

Решение задачи в среде пакета Mathcad при начальном значении $X_{n,m} = 0$ осуществляется в постановке, приведенной в листинге 1.

Given

$$D_i := 1 \quad X \cdot D \leq H \quad (1 \ 1 \ 1 \ 1) \cdot X = D^T \quad X \geq 0$$

$$X := \text{Minimize}(F, X)$$

$$X =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0
4	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1

Листинг 1 – Решение задачи о назначении целей в Mathcad

Из листинга 1 следует, что назначение целей по критерию K выполнено с соблюдением всех заданных ограничений. В принципе ограничения при мультипликативном критерии могут быть заданы с учетом приоритета целей, зон ответственности средств поражения.

Формирование вектора назначений V приведено в листинге 2. Номер элемента вектора соответствует номеру воздушной цели, значение элемента вектора - номеру средства поражения цели.

$$V := (1 \ 2 \ 3 \ 4) \cdot X \quad +$$

$$V =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	2	1	2	2	1	1	1	4	4	2	4	3	3	3	3	4

Листинг 2

Выводы

Постановка и решение многокритериальной задачи о назначении целей может быть осуществлены путем преобразования исходных данных с дополнительными ограничениями (условиями) к виду, обеспечивающему решение задачи в канонической форме. Этот подход может быть использован при решении задач о назначении целей с учетом приоритета целей и зоны ответственности средства поражения, а также при решении задачи комбинаторным методом с использованием локальной целевой функции [6, 7].

Список литературы

1. Медведева О. А., Полетаев А. Ю. Решение задачи о назначениях с дополнительными требованиям // Вестник Воронежского государственного университета. Сер.: Системный анализ и информационные технологии. 2016. № 1. С. 77–81.

2. Леликова Л. В., Харитонов А. Г., Чернышева Г. Д. Прикладные задачи о назначениях (модели, алгоритмы решения) // Вестник Воронежского государственного университета. Сер.: Системный анализ и информационные технологии. 2017. № 2. С. 22–27.

3. Salehi K. An approach for solving multi-objective assignment problem with interval parameters // Management Science Letters. 2017. № 4. P. 2155–2160.

4. Scarelli A. A., Narula S. C. Multicriteria assignment problem // Journal of Multi-Criteria Decision Analysis. 2002. № 11 (2). P. 65–74.

5. Балашова И. Ю. Модель и алгоритм решения задачи о назначениях с приоритетами // Информационные технологии в науке и образовании: тр. VII Всерос. науч.-практ. конф. Пенза : Изд-во ПГУ, 2020. С. 80–82.

6. Безяев В. С., Макарычев П. П. Алгоритм решения задачи о назначениях целей // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : сб. ст. X Международной научно-технической конференции / под ред. И. В. Бойкова. Пенза, 2015. С. 51–54.

7. Безяев В. С., Макарычев П. П. Решение задачи о назначениях в автоматизированных системах оперативного управления на основе тензорного исчисления // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2015. № 3 (35). С. 77–85.

Математическая модель размещения средств защиты информации облачной системы

Илья Сергеевич Мысякин

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

zergdragon@mail.ru

Аннотация. В связи с все более широким распространением облачных систем, задача обеспечения информационной безопасности является одной из основных задач, стоящих перед проектировщиками сетевой инфраструктуры. По результатам отчета исследовательской компании Gartner, к 2021 г. из-за неправильных конфигураций и неоптимизированных бизнес-процессов случаи утечки информации из публичных облаков увеличатся до 80 %. Поэтому компаниям, использующим распределенные облачные системы, необходимо задуматься об улучшении и оптимизацией безопасности используемых ими облачных систем.

Ключевые слова: облачные технологии, информационная безопасность, модель угроз, математическая модель

Mathematical model of placement of information security means of a cloud system

Ilya S. Mysyakin

Penza State University, Penza, Russia

zergdragon@mail.ru

Abstract. Due to the increasingly widespread use of cloud systems, the problem of ensuring information security is one of the main problems facing network infrastructure designers. According to a report by the research company Gartner, by 2021, due to incorrect configurations and not optimized business processes, cases of information leakage from public clouds will increase to 80%. Therefore, companies that use distributed cloud systems need to think about improving and optimizing the security of the cloud systems they use.

Keywords: cloud computing, information security, threat model, mathematical model

Введение

В последние годы заметна тенденция увеличения доли использования информационных технологий в различных областях жизнедеятельности. Современным подходом к проектированию распределенных информационных систем является направление облачных вычислений, которое содержит специализированный спектр технологий обработки

информации, когда ресурсы вычислительной сети предоставляются как Интернет-сервисы в зависимости от потребностей пользователей. Специфика облачных вычислений состоит в том, что ресурсы облака поддерживаются динамически, а его внутренняя структура остается скрытой от пользователей. Исходя из этого, обеспечение информационной безопасности, соответствующей требуемому уровню качества, является одной из первостепенных задач, стоящих перед проектировщиками сетевой инфраструктуры.

Поэтому возникает необходимость в построении современного подхода к реализации облачной системы, обладающего следующими свойствами:

1. Возможность построения общей методики информационной безопасности на основе концептуального образа распределенной облачной системы для наиболее оптимального размещения различных средств предотвращения доступа к информации;

2. Построение архитектуры информационной безопасности распределенной облачной системы, исходя из конкретной структуры сети;

3. Анализ возможных угроз системе, которые могут возникнуть на различных узлах сети в комплексной форме;

4. Подбор эквивалентных средств информационной безопасности для различных угроз.

Применение комплексного подхода анализа угроз и средств противодействия им позволит при проектировании информационной безопасности учесть большинство факторов, оказывающих влияние на информационную защищенность системы.

1. Модель угроз информационной безопасности в облачной среде

Для современных организаций проблема обеспечения информационной безопасности является одной из ключевых. Однако процесс создания системы защиты не ограничивается лишь этапом проектирования системы, а представляет собой постоянный поиск новых вариантов модернизации информационной безопасности. Это связано прежде всего с постоянно увеличивающимся числом угроз, потенциально способных нанести катастрофический ущерб в случае своей реализации в системе.

Угрозы информационной безопасности можно классифицировать по различным параметрам. Виды угроз представлены на рисунке 1.

Для комплексного подхода к построению системы информационной безопасности необходимо и угрозы оценивать комплексно. Можно построить следующую модель угрозы t представлена вектором нечетких базовых характеристик $f_{pt}(t)$:

$$f_{pt}(t) = \left((Price_i), (Select_j), (Opportunity_k) \right),$$

где $Price_i$ – потенциальная стоимость реализации угрозы на ресурс, $Select_j$ – предпочтение выбора угрозы по стоимости, $Opportunity_k$ – уровень возможности реализации угрозы.

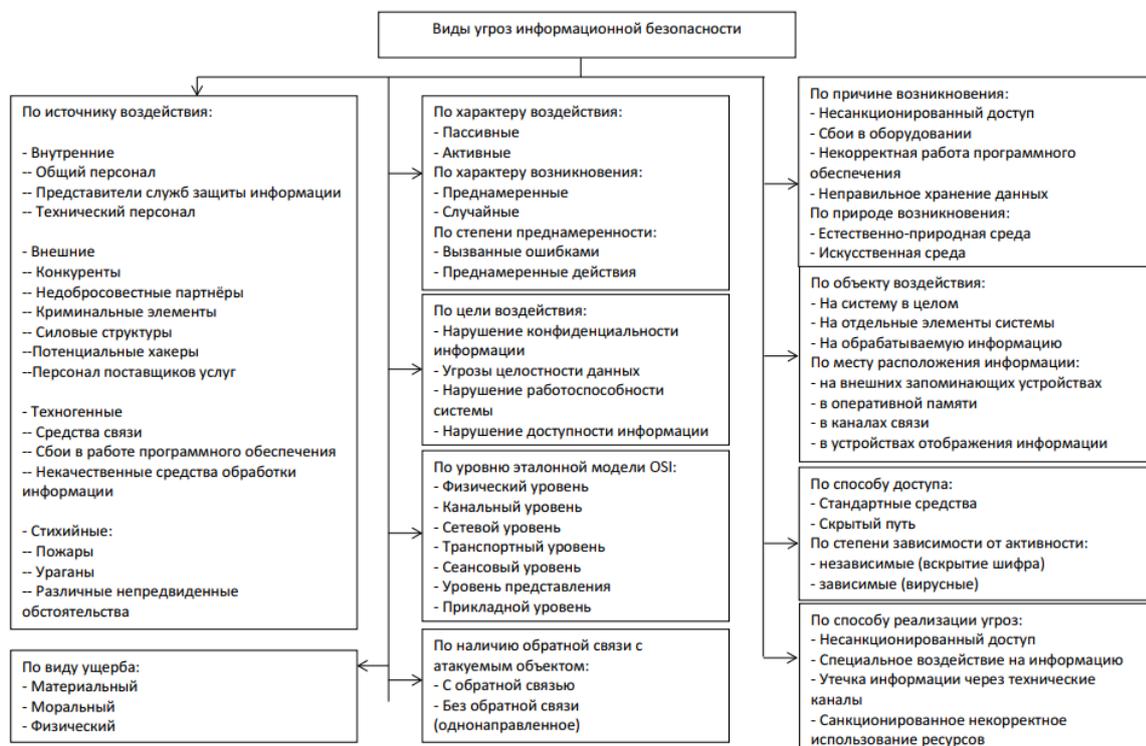


Рис. 1. Виды угроз информационной безопасности

Тогда множество угроз D можно представить в виде совокупности кортежей данных: $D_j = \langle K_i, P_{ij}, DMG_{ij} \rangle, i = 1, \dots, DN$, который состоит из объекта воздействия, вероятности i -й угрозы на j объекте и ущерба j -му объекту от i -й угрозы.

Вероятность P_{ij} осуществления угрозы D_j на объекте K_i будет равна вероятности появления трех независимых совместных событий:

$$P_{i,j} = P_{ij}^{otr} + P_{ij}^{node} + P_{ij}^{area} - P_{ij}^{otr} \cdot P_{ij}^{node} - P_{ij}^{node} \cdot P_{ij}^{area} - P_{ij}^{otr} \cdot P_{ij}^{area} + P_{ij}^{otr} \cdot P_{ij}^{node} \cdot P_{ij}^{area},$$

где P_{ij}^{otr} – вероятность появления угрозы D_j в отрасли, в которой ведет свою деятельность предприятие, P_{ij}^{node} – вероятность появления угрозы D_j на типе узлов, к которому относится узел K_i , P_{ij}^{area} – вероятность появления угрозы D_j в стране, в которой территориально расположен узел K_i .

Потенциальный ущерб DMG_{ij} , причиненный узлу K_i при реализации на нем угрозы D_j . Можно описать формулой:

$$DMG_{ij} = DMG_{ij}^{data} + DMG_{ij}^{tech} + DMG_{ij}^{losses},$$

где DMG_{ij}^{data} – ущерб от потери, утечки либо изменения данных на узле K_i при реализации на нем угрозы D_j , DMG_{ij}^{tech} – ущерб от повреждения программного или аппаратного обеспечения на узле K_i при реализации на нем угрозы D_j , DMG_{ij}^{losses} – ущерб, полученный из-за простоя оборудования на узле K_i – за время ликвидации последствий от реализации на нем угрозы D_j .

2. Модель облачной системы для оптимизации размещения средств защиты информации

Помимо множества угроз D введем множество общих ограничений UL , и множество локальных ограничений LL накладываемых на систему.

Введем множества контрмер для противодействия различным угрозам:

1) $NB = \{NB_i, i = 1, \dots, CCOUNT_{NB}\}$ – брандмауэры или межсетевые экраны.

2) $NA = \{NA_i, i = 1, \dots, CCOUNT_{NA}\}$ – антивирусы

3) $NF = \{NF_i, i = 1, \dots, CCOUNT_{NF}\}$ – средства аутентификации пользователей

4) $NP = \{NP_i, i = 1, \dots, CCOUNT_{NP}\}$ – средства разграничения доступа

5) $NVL = \{NVL_i, i = 1, \dots, CCOUNT_{NVL}\}$ – VLAN

6) $NI = \{NI_i, i = 1, \dots, CCOUNT_{NI}\}$ – IDS-система обнаружения вторжений.

7) $NPK = \{NPK_i, i = 1, \dots, CCOUNT_{NPK}\}$ – PKI-инфраструктура открытых ключей.

8) $NW = \{NW_i, i = 1, \dots, CCOUNT_{NW}\}$ – средства обеспечения целостности.

9) $NC = \{NC_i, i = 1, \dots, CCOUNT_{NC}\}$ – криптографические средства.

Так как отдельные угрозы воздействуют не на всю распределенную систему, а на отдельные ее элементы, поэтому необходимо определить индивидуальный набор средств защиты таким образом, чтобы минимизировать потенциальный ущерб системе PDU , представляющий из себя сумму локальных показателей потенциального ущерба на каждом из элементов сети PDL_i .

Наиболее важным показателем для любого средства является его эффективность по критериям класса, к которому оно принадлежит. Наиболее достоверным и адекватным способом оценить эту эффективность является эксперимент, в рамках которого контрмеры по противодействию угрозам сравниваются по критериям. Таким образом, эффективность средства защиты l из класса m по критерию O_{mz} можно выразить формулой:

$$E_{mlz} = \frac{OC_{mlz}}{O_{mz}^{\text{lim}}},$$

где OC_{mlz} – показатель исследуемой контрмеры в эксперименте, O_{mz}^{lim} – идеальное значение в эксперименте.

Задачу минимизации ущерба от вероятной реализации можно представить как необходимость минимизировать суммарный показатель потенциального ущерба системе. Данный показатель рассчитывается как сумма показателей потенциального ущерба PDL узлов сети:

$$PDL = \sum_{i=1}^n PDL_i = \sum_{i=1}^n CNT_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{DCOUNT} P_{ij} \cdot DMG_{ij} \right),$$

где CNT_i – количество соответствующих узлов.

Вероятность реализации угрозы P_{ij} рассчитывается по следующей формуле:

$$P_{ij} = P_{ij}^0 - PRD_{ij}$$

где P_{ij}^0 – начальная вероятность реализации угрозы D_j на узле K_i , PRD_{ij} – изменение вероятности реализации угрозы D_j на узле K_i вследствие размещенных на узле K_i мер противодействия угрозам C_l . Показатель PRD_{ij} рассчитывается следующим образом:

$$PRD_{ij} = \sum_{m=1}^{OCOUNT_m} \sum_{z=1}^{OCOUNT_m} \sum_{j=1}^{OCOUNT} \left(IND_{mzj} \cdot PRDC_{mzj} \cdot \sum_{l=1}^{CCOUNT_m} E_{mlz} \cdot x_{mli} \right),$$

где E_{miz} – эффективность средства защиты по противодействию угрозе D_j на узле K_i по критерию O_{mz} , x_{mli} – показатель наличия или отсутствия предмета C_l из класса N_m на узле K_i .

Объем потенциального ущерба DMG_{ij} рассчитывается по формуле:

$$DMG_{ij} = DMG_{ij}^0 - DRD_{ij}$$

где DMG_{ij}^0 – начальный потенциальный ущерб от реализации угрозы D_j на узле K_i , DRD_{ij} – изменение потенциального ущерба в случае реализации угрозы D_j на узле K_i вследствие размещенных на узле K_i мер противодействия угрозам C_l . DRD_{ij} рассчитывается следующим образом:

$$DRD_{ij} = \sum_{m=1}^{OCOUNT_m} \sum_{z=1}^{OCOUNT_m} \sum_{j=1}^{OCOUNT} \left(IND_{mzj} \cdot DRDC_{mzj} \cdot \sum_{l=1}^{CCOUNT_m} E_{mlz} \cdot x_{mli} \right).$$

Таким образом, целевая функция выражена таким образом: необходимо минимизировать показатель общего потенциального ущерба:

$$PDU = \sum_{i=1}^{KCOUNT} CNT_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{DCOUNT} \left(P_{ij}^0 - P_{ij}^0 \times \right. \right. \\ \times \left(\sum_{m=1}^{NCOUNT_m} \sum_{z=1}^{OCOUNT_m} \sum_{j=1}^{DCOUNT} \left(KPR_i \cdot IND_{mzj} \cdot \right. \right. \\ \left. \left. PRDC_{mzj} \cdot \sum_{l=1}^{CCOUNT_m} E_{mlz} \cdot x_{mli} \cdot (1 + KS_{ml}) \right) \right) \cdot \left(DMG_{ij}^0 - \right. \\ \left. - \sum_{m=1}^{NCOUNT_m} \sum_{z=1}^{OCOUNT_m} \sum_{j=1}^{DCOUNT} \left(KPR_i \cdot IND_{mzj} \cdot DRDC_{mzj} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \sum_{l=1}^{CCOUNT_m} E_{mlz} \cdot x_{mli} \cdot (1 + KS_{ml}) \right) \right) \right)$$

Данная модель позволяет рассмотреть каждый класс средств защиты (NB, NA, NF, NP, NVL, NVP, NI, NPK, NW, NC, NX) и определить оптимальное количество x_{mli} каждого средства защиты l из класса m , размещаемого на точке i .

Однако, достижение максимальной эффективности возможно лишь при неограниченном запасе финансовых и аппаратных ресурсов, поэтому другим важным критерием оптимизации структуры безопасности является минимизация затрат по введению контрмер. Формализованно этот критерий выглядит следующим образом: необходимо свести к минимуму суммы расхода ресурсов по локальным и общим ограничениям, и так как в реальных задачах локальные и общие ограничения заданы строго, применяется следующая формула.

$$\forall z_1^{LLCOUNT}, i_1^{KCOUNT} \sum_{m=1}^{NCOUNT} \sum_{l=1}^{CCOUNT} LLC_{mlz} \cdot x_{mli} \leq LLK_{iz};$$

$$\forall z_1^{LLCOUNT}, i_1^{KCOUNT} \sum_{m=1}^{NCOUNT} \sum_{l=1}^{CCOUNT} ULC_{mlz} \cdot x_{mli} \leq UL_z.$$

Список литературы

1. Гайдамакин Н. А. Разграничение доступа к информации в компьютерных системах. Екатеринбург : Изд-во Уральского ун-та, 2003. 328 с.
2. Скиба В. Ю., Курбатов В. А. Руководство по защите от внутренних угроз информационной безопасности. СПб. : Питер, 2008. 322 с.
3. Богаченко Н. Ф. Безопасность системы с ролевым разграничением доступа // Решетневские чтения. 2012. № 16. С. 654–655.
4. Гильмуллин Т. М. Модели и комплекс программ процесса управления рисками информационной безопасности: автореф. дис. канд. техн. наук: 05.13.18. Казань, 2010. 21 с.

Вопросы защиты информации при использовании технологий виртуализации

Юлия Фридриховна Захарова¹, Александра Александровна Кочнева²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹olegzakharov@rambler.ru, ²kochnevasashulya@yandex.ru

Аннотация. Рассматриваются основные понятия защиты информации при использовании технологий виртуализации, угрозы информационной безопасности, методы и средства защиты информации. Особое внимание уделяется криптографическим средствам защиты информации. В дополнение к рассмотрению теоретических аспектов, для программной реализации был выбран протокол обмена ключами Диффи – Хеллмана. Данный алгоритм разработан на двух языках программирования. Проведена проверка реализаций на работоспособность. Сделан вывод о том, что криптосистемы-протоколы играют важную роль при защите информации с использованием технологий виртуализации, так как они составляют целую систему, направленную на видоизменение конфиденциальных данных, чтобы сделать их бесполезными для злоумышленников.

Ключевые слова: защита информации, виртуализация, угрозы информационной безопасности, средства защиты, криптография, протокол, программная реализация

Information security issues when using virtualization technologies

Yuliya F. Zakharova¹, Aleksandra A. Kochneva²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹olegzakharov@rambler.ru, ²kochnevasashulya@yandex.ru

Abstract. This article discusses the basic concepts of information protection when using virtualization technologies, threats to information security, methods and means of protecting information. Special attention is paid to cryptographic means of information protection. In addition to considering theoretical aspects, the Diffie – Hellman key exchange protocol was chosen for the software implementation. This algorithm is developed in two programming languages. Checking the implementations for performance. It is concluded that cryptosystems-protocols play an important role in protecting information using virtualization technologies, since they constitute a whole system aimed at modifying confidential data to make it useless for intruders.

Keywords: information protection, virtualization, information security threats, protection means, cryptography, protocol, software implementation

Сам термин «виртуализация» в компьютерных технологиях появился в шестидесятых годах прошлого века вместе с термином «виртуальная машина» [1]. В девяностых годах стали очевидны перспективы подхода виртуализации: с ростом аппаратных мощностей, как персональных компьютеров, так и серверных решений, вскоре представится возможность использовать несколько виртуальных машин на одной физической платформе.

Виртуальная машина представляет собой программный контейнер, связывающий полный комплект виртуальных аппаратных ресурсов, а также ОС и все ее приложения в программном пакете.

Основными особенностями виртуальных машин являются:

- совместимость (виртуальные машины совместимы со всеми стандартными компьютерами, виртуальная машина работает под управлением собственной гостевой оперативной системы и выполняет собственные приложения);
- изолированность (виртуальные машины полностью изолированы друг от друга, как если бы они были физическими компьютерами);
- инкапсуляция (виртуальные машины полностью инкапсулируют вычислительную среду).

Понятие виртуализации условно можно разделить на две фундаментально различающиеся категории:

1. Виртуализация платформ. Продуктом этого вида виртуализации являются виртуальные машины – некие программные абстракции, запускаемые на платформе реальных аппаратно-программных систем.

2. Виртуализация ресурсов. Данный вид виртуализации преследует своей целью комбинирование или упрощение представления аппаратных ресурсов для пользователя и получение неких пользовательских абстракций оборудования, пространств имен, сетей и т. п.

Угроза информационной безопасности – это фактор, стремящийся нарушить работу виртуальной системы [2]. В настоящее время рассматривается достаточно широкий перечень угроз информационной безопасности, насчитывающий сотни пунктов.

Однако, ГОСТ Р 56938-2016 «Защита информации. Защита информации при использовании технологий виртуализации. Общие положения» акцентирует внимание на том, что использование технологий виртуализации создает предпосылки для появления угроз безопасности, не характерных для информационных систем, построенных без использования технологий виртуализации, и выделяет 18 угроз, которые дополнительно могут возникать при использовании технологий виртуализации. Все они приведены в квалификационной работе одного из авторов статьи.

В данной работе наибольшее внимание уделяется 17-й угрозе «угрозы несанкционированного доступа к хранимой в виртуальном пространстве защищаемой информации». Стоит отметить, что все методы и

средства защиты информации должны быть не только физическими (сервера с сооружениями, препятствующими физическому доступу злоумышленников), но и информационными, для того чтобы информацию невозможно было прочесть даже получив доступ к серверу, т.к. она будет закрыта средствами криптографии.

В ходе выполнения данной работы были изучены основы защиты информации при использовании технологий виртуализации, а также рассмотрены криптографические средства защиты информации, в частности: протокол обмена ключами Диффи–Хеллмана, его теоретические основы, атаки, проводимые на протокол, протоколы на эллиптических кривых, протокол Эль–Гамала и его стойкость, протокол МТИ/А(0).

В дополнение к рассмотрению теоретических аспектов, в практической части для программной реализации был выбран протокол обмена ключами Диффи–Хеллмана.

Протокол обмена ключами Диффи–Хеллмана является достаточно надежным методом обмена ключами через незащищенные каналы передачи информации. Он используется в системах, обеспечивающих безопасность передаваемых данных и протоколах, используемых сегодня. За долгие годы использования протокола обмена ключами Диффи–Хеллмана было разработано множество атак, но и сам протокол не стоял на месте и множество исследователей изменяли и модифицировали его. Это доказывает, что безопасный обмен секретными ключами является важным аспектом защиты информации и делает протокол обмена ключами Диффи–Хеллмана востребованным и в наше время.

Данный алгоритм реализован на двух языках программирования, Java и C++. Реализации были написаны максимально приближенно друг к другу. Проведена проверка реализаций на работоспособность. Обе реализации показали идентичные результаты, при использовании одинаковых наборов входных данных.

При разработке реализаций протокола обмена ключами Диффи–Хеллмана были предусмотрены функции, отвечающие за подсчет времени работы протокола в миллисекундах.

Время замерялось до начала и после проведения вычисления секретного ключа. Среднее время будем рассчитывать за 100 проходов. Это позволит максимально снизить уровень влияния аппаратуры, на время сортировки.

На рис. 1 показан график сравнения времени вычисления секретных ключей при помощи протокола обмена ключами Диффи–Хеллмана. На оси абсцисс у нас расположено количество итераций, а на оси ординат время (в миллисекундах) вычисления секретного ключа.

Как мы видим, время вычисления ключа на языке Java значительно быстрее, чем на C++. В нашем случае время вычисления секретного ключа зависит от языка программирования. Поскольку на языке программирования Java использовались встроенные функции, недоступные

на языке программирования C++, что и оказало большое влияние на скорость работы программ. Погрешность в графиках обуславливается аппаратными характеристиками компьютера, на котором проходило тестирование. Для сравнительного анализа реализаций протокола обмена ключами Диффи–Хеллмана были добавлены функции подсчета времени, позволяющие выявить быстрдействие обеих реализация. Для получения более точных результатов было проведено не менее 100 итераций вычисления общего секретного ключа протоколом Диффи–Хеллмана.

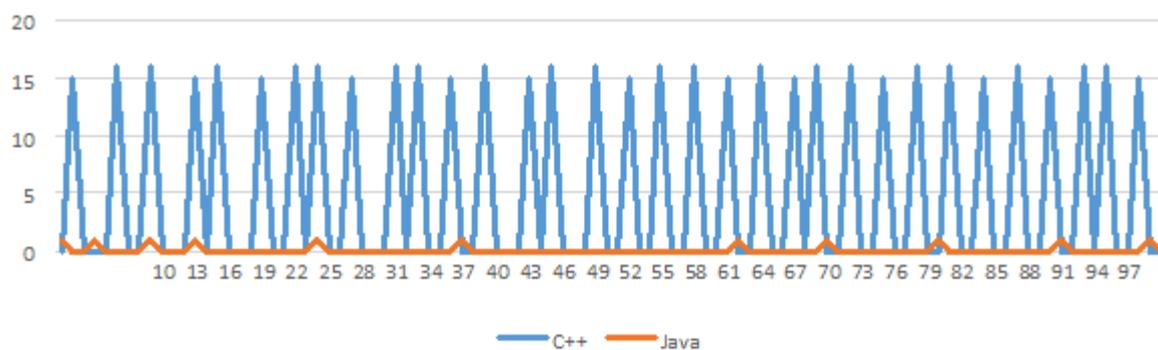


Рис. 1. Время вычисления ключей в обеих реализациях.

Практическое сравнение реализаций показало, что быстрдействие реализации, написанной на языке программирования Java, превосходит аналогичную реализация на языке программирования C++. Такие результаты достигаются за счет встроенных методов Java, которые отсутствуют в C++.

Данные выводы показывают, что использование языка программирования Java выгоднее использовать при создании систем, обеспечивающих безопасность передачи данных, которые задействуют протокол обмена ключами Диффи–Хеллмана.

Список литературы

1. Яценко В. В. Введение в криптографию. 4-е изд., доп. М. : МЦНМО, 2012. 348 с.
2. Схема Эль-Гамала. Инфраструктура открытых ключей. URL: <https://lectoriy.mipt.ru/file/synopsis/pdf/CompTech-InforSecur-M08Vladim131102.01.pdf> (дата обращения: 18.04.2021)
3. Защита информации. Криптография. URL: https://www.bestreferat.ru/referat-308600.html#_Тос263861744 (дата обращения: 20.04.2021)
4. Криптографические средства защиты информации. URL: https://knowledge.allbest.ru/programming/2c0a65635a3ac68a5d43b89421316d27_0.html (дата обращения 25.04.2021)

Математическая модель, алгоритм и программа расчета параметров движения контура пожара на территории хранения взрывоопасных объектов

Александр Николаевич Купцов¹, Константин Владимирович Печаткин²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹kuptsov1953@gmail.com, ²phetryok@gmail.com

Аннотация. Предлагается математическая модель движения контура низового пожара на территории хранения взрывоопасных объектов. Приведен алгоритм последовательности расчета положения фронта пожара в различные моменты времени и его программное обеспечение.

Ключевые слова: контур пожара, зона горения, скорость движения контура, взрывоопасный объект

Mathematical model, algorithm and program for calculating of the parameters of the movement of the fire contour in the storage area of explosive objects

Aleksandr N. Kuptsov¹, Konstantin V. Pechatkin²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹kuptsov1953@gmail.com, ²phetryok@gmail.com

Abstract. A mathematical model of the motion of a ground fire contour on the storage territory of explosive objects is proposed. An algorithm of the sequence of calculating of the fire front position at different times and its software was carried out.

Keywords: a fire contour, a fire area, a contour speed, an explosive object

Уравнения движения контура описывают контур пожара в каждый момент времени как линию на плоскости. В дальнейшем мы будем использовать два вида уравнений этой линии: заданные в неявном виде $\varphi(x, y, t) = 0$ и записанные в явном виде, когда уравнение разрешено относительно одной из пространственных переменных, например $y = f(x, t)$. Установим сначала связь уравнений движения контура с уравнениями горения.

Если определить кромку пожара как нанесенную на карту изотерму, соответствующую температуре горения слоя, то для описания линии контура достаточно располагать уравнением теплового баланса для горячего [1–3]

$$\beta_m \rho_m C_m \left(\frac{\partial T_m}{\partial t} + V \cdot \text{grad} T_m \right) = \text{div}(\lambda_m (1 - \gamma) \text{grad} T_m), \quad (1)$$

где β_M – коэффициент заполнения горючего материала; ρ_M – плотность горящей массы; C_M – теплоемкость горящей массы; T_M – температура горения слоя; V – скорость контура горения; λ_M – теплопроводность твердого горючего.

Для пожаров, размер которых в плане много больше ширины зоны горения, величиной теплопроводности твердого горючего λ_M можно пренебречь, тогда уравнение (1) в соответствии с принятой в теории дифференциальных уравнений классификацией становится гиперболическим и, исходя из физического смысла задачи, должно рассматриваться при следующем начальном условии (при $t = 0$):

$$T_m(x, y, 0) = \begin{cases} T_p, \\ T_0, \end{cases} \quad (2)$$

где T_p – температура горения слоя; при $x, y \in B_0$; T_0 – начальная температура горючего; B_0 – заданная область на плоскости Oxy , граница которой C представляет собой кромку пожара в начальный момент времени.

Кроме того, должны быть заданы все значения параметров, необходимых для вычисления вектора скорости распространения огня $V(x, y, t)$ для всех $x, y \in D, t \geq 0$. (Ниже всюду предполагается известной скорость движения контура в каждой его точке в любой момент времени. Эта величина считается определенной с помощью модели скорости распространения горения.)

Задача (1)–(2) является задачей Коши и при $\lambda_M = 0$ описывает движение линии скачка температуры горючего $T_m(x, y, t)$. Решение этой задачи определяется конусом характеристических нормалей уравнения (1), проходящим при $t = 0$ через границу области B_0 . Пусть $\varphi(x, y, t) = 0$ – уравнение контура в момент времени t . Тогда, как следует из теории уравнений в частных производных гиперболического типа, функция $\varphi(x, y, t)$ должна удовлетворять условию Гамильтона-Якоби для уравнения (1)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + V \cdot \text{grad} \varphi = 0. \quad (3)$$

Если в качестве скорости движения контура V рассматривать нормальную скорость, в каждой точке контура совпадающей по направлению с $\text{grad} \varphi$, то ее можно выразить следующим образом

$$\bar{V}_n = \frac{\text{grad} \varphi}{|\text{grad} \varphi|} \cdot V_n, \quad (4)$$

где $grad\varphi / |grad\varphi|$ – единичный вектор нормали к кромке; $V_n = |\bar{V}_n|$ – величина нормальной скорости контура.

Подставив (4) в (3) получим уравнение, описывающее движение контура пожара

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \bar{V}_n \cdot |grad\varphi| = 0. \quad (5)$$

Причем при $t = 0$

$$\varphi(x, y, 0) = \varphi_0(x, y), \quad (6)$$

где $\varphi_0(x, y) = 0$ - уравнение внешней границы области B_0 .

Часто контур пожара удобно описывать в явном виде

$$y = f(x, t). \quad (7)$$

В этом случае $\varphi(x, y, t) = f(x, t) - y = 0$ и из (5) следует

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \bar{V}_n \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = 0. \quad (8)$$

Уравнение контура можно записать и в виде

$$\varphi(x, y, t) = y - f(x, t) = 0. \quad (9)$$

В этом случае в уравнении (9) второе слагаемое войдет с минусом. Знак этого слагаемого, как увидим ниже, связан с направлением обхода контура. Уравнение (9) соответствует обходу контура по часовой стрелке. Этому же правилу, мы будем придерживаться и в других уравнениях.

Начальное условие к уравнению (9)

$$y(x, 0) = f(x, 0) = f_0(x), \quad (10)$$

причем $y = f_0(x)$ - уравнение линии $\varphi_0(x, y) = 0$ записанное в явном виде.

Уравнение (8) можно получить и геометрически, исходя лишь из рассмотренной выше гипотезы, согласно которой скорость распространения нормальна к контуру, что показано на рис.1.

Рассмотрим точку С, которая в момент времени $t+dt$ переместилась в точку С'. Координаты точки С были $[x, y(x, t)]$, координаты точки С' $[x+dx, y(x+dx, t+dt)]$.

Рассмотрим подробнее координату y точки С'.

Из треугольника САС' следует

$$y(x + dx, t + dt) = y(x + \bar{V}_n \cdot \cos \alpha dt, t + dt).$$

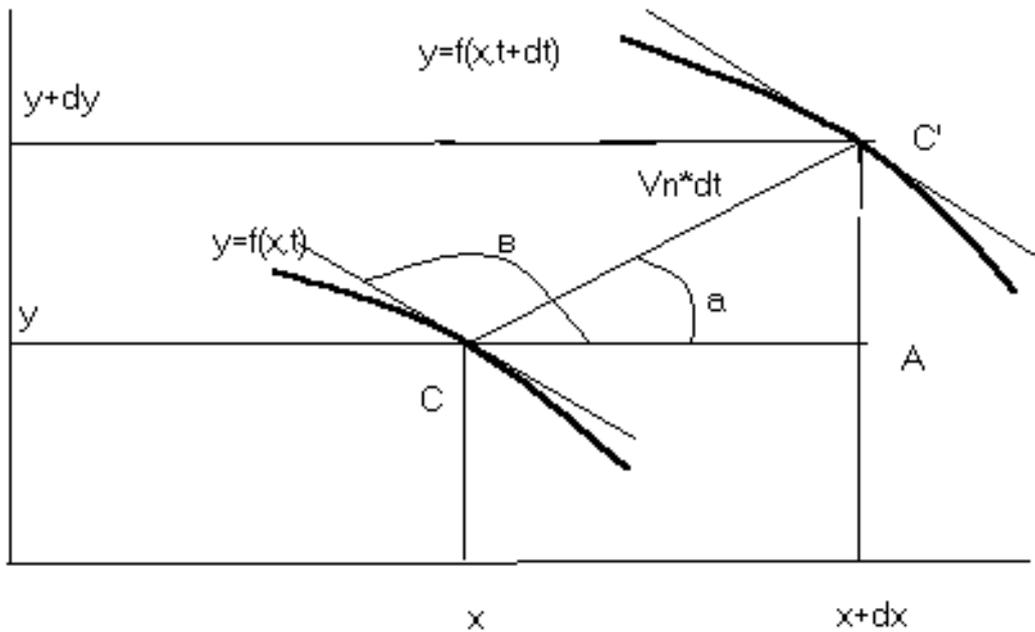


Рис. 1. Положение контура в два близких момента времени t и $t+dt$

Разложим теперь правую часть последнего равенства в точке (x,t) . Ограничиваясь линейными членами, имеем

$$y(x+dx, t+dt) = y(x,t) + \frac{\partial y}{\partial x} \bar{V}_n \cdot dt \cdot \text{Cos}\alpha + \frac{\partial y}{\partial t} dt.$$

С другой стороны, как видно из рисунка,

$$y(x+dx, t+dt) = y(x,t) + dy = y(x,t) + \bar{V}_n \cdot dt \cdot \text{Sin}\alpha.$$

Приравнивая правые части последних двух равенств, получим

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \bar{V}_n \cdot \text{Cos}\alpha - \bar{V}_n \cdot \text{Sin}\alpha = 0. \quad (11)$$

Но угол α , как видно из рис. 1, связан с углом β , определяемым производной

$$\frac{\partial y}{\partial x} : \beta = \text{arctg}(y_x).$$

Отсюда имеем

$$\alpha = \beta - \frac{\pi}{2}, \quad \text{Cos}\alpha = \text{Sin}\beta, \quad \text{Sin}\alpha = -\text{Cos}\beta,$$

$$\text{Sin}\beta = \frac{y_x}{\sqrt{1+y_x^2}}, \quad \text{Cos}\beta = \frac{1}{\sqrt{1+y_x^2}}.$$

Уравнение (11) после подстановки этих значений примет окончательный вид

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \bar{V}_n \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = 0. \quad (12)$$

Вычислительная процедура построения контура основана на пошаговом счете положения точек контура на дискретной сетке, условно нанесенной на рассматриваемую территорию (рис. 2).

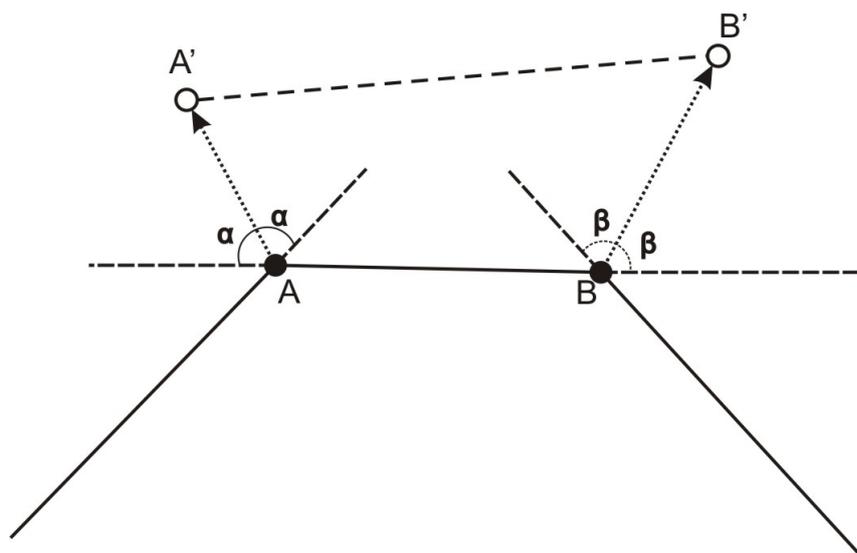


Рис. 2. Схема формирования новых узлов фронта пожара

Схема алгоритма последовательного расчета положения фронта в различные моменты времени приведена на рис. 3, на основании которой была составлена программа. Удовлетворительная сходимость результатов вычислений по программе с экспериментальными данными подтвердила правильность полученной математической модели.

Описание алгоритма

1. Блок 2 - ввод точки возникновения пожара и определение ее координат.
2. Блок 3 - расчет скорости распространения пожара, на основе параметров горения, выбранной точки.
3. Блок 4 - начало цикла формирования узловых точек фронтов.
4. Блоки 5, 6, 7 - расчет узловых точек фронтов.
5. Блоки 8-12 - оптимизация координат узловых точек вновь полученного слоя фронта пожара.

Таким образом, предложена математическая модель, алгоритм и программа, которые позволяют вычислить параметры движения контура пожара на территории хранения взрывоопасных объектов.

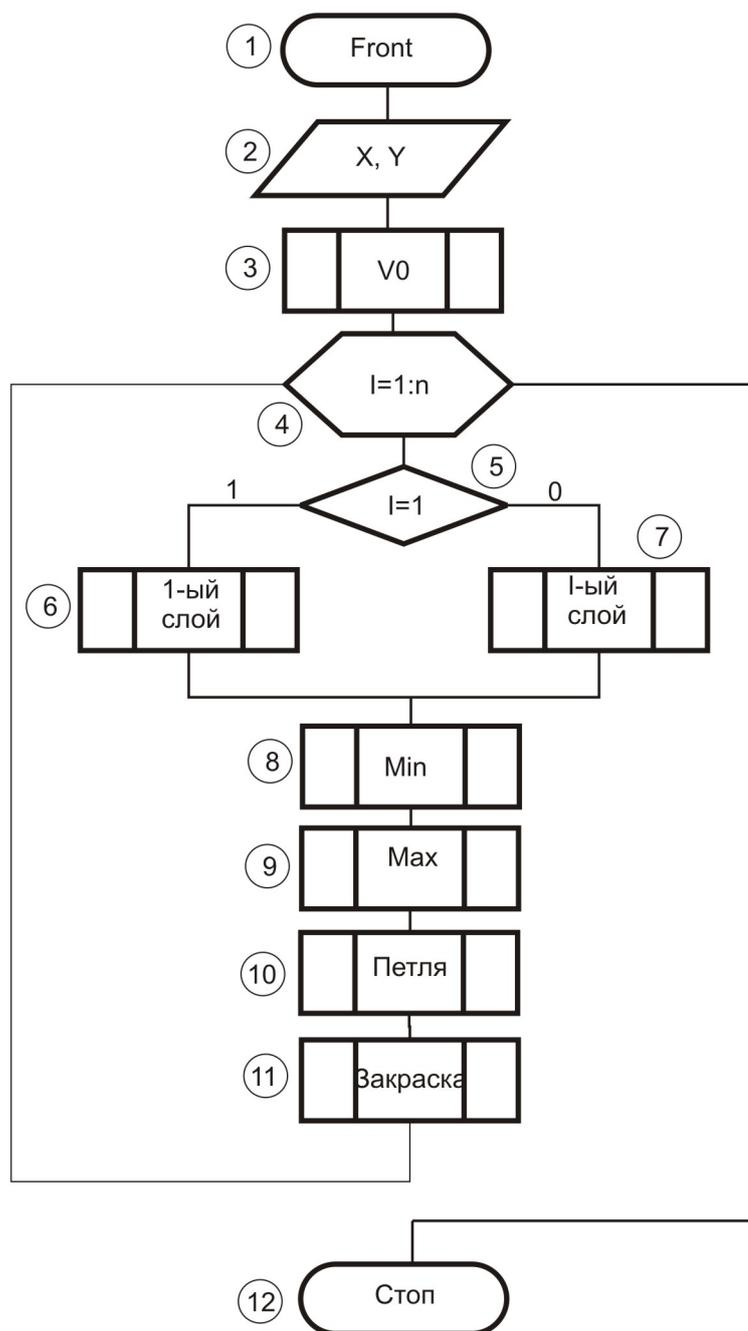


Рис. 3. Схема алгоритма последовательного расчета положения фронта в различные моменты времени

Список литературы

1. Гришин А. М. Математическое моделирование лесных пожаров и новые способы борьбы с ними. Новосибирск : Наука, 1992. 408 с.
2. Барановский Н. В. Основные принципы параллельной реализации общей математической модели лесного пожара // Пожарная безопасность. 2008, № 1. С. 296.
3. Курбатский Н. П., Теплыгин Г. П. Современные исследования типологии и пирологии леса. Архангельск : АИЛИЛХ, 1976. 139 с.

Особенности криптографических алгоритмов, основанных на многомерных квадратичных системах

Юлия Фридриховна Захарова¹, Светлана Евгеньевна Макарова²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹olegzakharov@rambler.ru, ²makarova.svetlana58@gmail.com

Аннотация. Рассмотрен общий принцип многомерной и постквантовой криптографии, а также обзор существующих алгоритмов. Для предотвращения угроз безопасности шифрования цифровой подписи был реализован криптографический алгоритм, основанный на многомерной квадратичной системе. Также рассмотрели два алгоритма многомерных систем: системы Мацумото – Имаи и алгоритм HFE (скрытые уравнения поля). Для программной реализации цифровой подписи в дальнейшем использовался алгоритм HFE.

Ключевые слова: многомерная криптография, постквантовая криптография, системы Мацумото – Имаи, алгоритм HFE

Features of cryptographic algorithms based on multidimensional quadratic systems

Yuliya F. Zakharova¹, Svetlana E. Makarova²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹olegzakharov@rambler.ru, ²makarova.svetlana58@gmail.com

Abstract. In this article, the general principle of multidimensional and post-quantum cryptography is considered, as well as a review of existing algorithms. To prevent security threats to digital signature encryption, a cryptographic algorithm based on a multidimensional quadratic system was implemented. We also considered two algorithms for multidimensional systems: the Matsumoto – Imai system and the HFE (Hidden Field Equations) algorithm. HFE algorithm was further used for software implementation of digital signature.

Keywords: multidimensional cryptography, post-quantum cryptography, Matsumoto – Imai systems, HFE algorithm

Для того чтобы информационные технологии можно было использовать в различных областях, необходимо обеспечить их надежность и безопасность. Под безопасностью (в широком смысле) понимается способность информационной системы сохранять свою целостность и работоспособность при случайных или преднамеренных внешних воздействиях. Поэтому широкое использование информационных технологий привело к бурному развитию различных методов защиты информации,

из которых основными можно, пожалуй, назвать, помехоустойчивое кодирование и криптографию.

Большинство криптосистем с открытым ключом, используемых на практике, основаны на целочисленной факторизации или дискретных логарифмах (в конечных полях или эллиптических кривых).

Преимуществами данных систем являются:

– Скорость. Системы, построенные на алгоритмах многомерной криптографии достаточно быстры, особенно для подписи документов. Есть много предпосылок, что они могут быть быстрее, чем классические криптографические схемы с открытыми ключами, например RSA.

– Скромные требования к вычислительным ресурсам. Математические операции, выполняемые многомерными схемами, обычно очень просты: большинству схем требуется только сложение и умножение по небольшим конечным полям. Поэтому многомерные схемы требуют скромных вычислительных ресурсов, что делает их привлекательными для использования на недорогих устройствах, таких как RFID чипы и смарт-карты, без необходимости наличия криптографического сопроцессора. Вариант схемы S^* , называемый SFLASH, был предложен Европейской комиссией в качестве стандарта для схем подписи на недорогих устройствах.

Однако, эти системы страдают от двух недостатков:

– достижения в области теории чисел привели к снижению эффективности вычислений, поэтому размеры параметров должны быть увеличены в соответствии с требованиями безопасности;

– если можно построить достаточно большие квантовые компьютеры, алгоритм Шора сделает текущие системы полностью небезопасными. Поэтому важно искать альтернативные системы, которые способствуют эффективной и безопасной связи.

Схема открытого ключа Мацумото-Имаи использует поля $GF(2)$ [1]. Это позволяет генерировать подписи намного быстрее, чем схема RSA. К тому же схема очень проста в реализации.

Мацумото и Имаи использовали биективное отображение F над степенью n полем расширения E из $GF(2)$ формы: $F : E \rightarrow E$, $F(X) = X^{2^\theta + 1}$.

Чтобы убедиться, что это преобразование обратимо, необходимо выбрать θ таким образом, что $\text{НОД}(2^\theta + 1, 2^n - 1) = 1$. Благодаря каноническому изоморфизму между $GF(2^n)$ [2] и векторным пространством $GF(2^n)$ систему многомерных квадратичных уравнений над полем, объясняется это Эндоморфизмом Фробениуса. Для того чтобы спрятать структуру F Мацумото и Имаи использовали два аффинных преобразо-

вания S и T . Таким образом, они представили открытый ключ в форме: $P = S \circ F \circ T$.

Следующие теоремы помогают объяснить криптоанализ

Теорема 1. Если открытый ключ построен, как указано выше, а β записывается как:

$$\beta = \sum_{j=1}^r 2^{u_j}, \quad 0 \leq u_j \leq m, \quad (1)$$

то показатели X с ненулевыми коэффициентами могут быть выражены как

$$\alpha \sum_{j=1}^r z_j 2^{u_j} \pmod{2^m - 1}, \quad z_j = \overline{0,1}, \quad (2)$$

и их соответствующие коэффициенты как

$$ab^k, \quad \text{где } k \equiv \sum_{j=1}^r (1 - z_j) 2^{u_j} \pmod{2^m - 1}. \quad (3)$$

Следствие 1. По крайней мере m различных (a, b, α, β) определяют один и тот же ключ шифрования.

Следствие 2. Если $u_1 = 0$ тогда $b = (\text{коэффициент } X \text{ в степени } 0) / (\text{коэффициент } X \text{ в степени } \alpha)$ а также $a = (\text{коэффициент } X \text{ в степени } 0) / b^\beta$.

Теорема 2. Если $\text{НОД}(\alpha, 2^m - 1) = 1$ и $\text{НОД}(\beta, 2^m - 1) = 1$, то список показателей X в $E(X)$ с ненулевыми коэффициентами содержит единственное подмножество размера r вида $\{2^{v_1} \alpha_1, 2^{v_2} \alpha_1, \dots, 2^{v_r} \alpha_1\}$ по модулю $2^m - 1$. Учитывая следствие 1, имеем: $\alpha = a_1$ и $\beta = \sum 2^{v_j}$.

Криптографические алгоритмы многомерных квадратичных систем основываются на сложности решения системы многомерных квадратичных многочленов над конечным полем. Системы из этого раздела обладают хорошей скоростью и небольшими требованиями к вычислительным ресурсам, однако, длины открытых ключей довольно большие[3]. Наиболее известным примером является криптосистема HFE (Hidden Fields Equations).

Скрытые уравнения поля (HFE) – разновидность криптографической системы с открытым ключом, которая является частью многомерной криптографии. Также известна как односторонняя функция с потайным входом HFE. Данная система является обобщением системы Мацумото-Имаи и впервые была представлена Жаком Патарином в 1996 году на конференции Eurocrypt.

Система скрытых уравнений поля основана на многочленах над конечными полями K разного размера, чтобы замаскировать связь между закрытым ключом и открытым ключом.

НФЕ на самом деле является семейством, которое состоит из основных НФЕ и комбинаций версий НФЕ. Семейство криптосистем НФЕ основано на трудности поиска решений системы многомерных квадратных уравнений (так называемой задаче MQ, поскольку она использует частные аффинные преобразования, чтобы скрыть расширение поля и частные полиномы). Скрытые уравнения поля также использовались для построения схем цифровой подписи, таких как Quartz и SFLASH.

Также для построения НФЕ используется основная теорема.

Теорема. Пусть L_N – конечное поле, причем $|L_N| = q^n$ с q и n «не слишком большими» (например, $q \leq 64$ и $n \leq 1024$). Пусть $f(x)$ – заданный многочлен от x над полем L_N со степенью d «не слишком большой» (например, $d \leq 1024$). Пусть a – элемент поля L_N . Тогда всегда можно найти все корни уравнения $f(x)=a$.

Основная идея построения семейства систем скрытых уравнений поля в качестве многомерной криптосистемы заключается в построении секретного ключа, начиная с полинома P с одним неизвестным x над некоторым конечным полем L_N . Этот полином может быть инвертирован над L_N , то есть может быть найдено любое решение уравнения $P(x)=y$, если оно существует. Преобразование секрета, также, как и расшифровка или/и подпись, основано на этой инверсии.

В случае RSA известно, что для данного криптографического алгоритма требуется минимум 512 бит и для обеспечения уровня безопасности 2^{100} . Во-первых, размер ключа RSA, безусловно, очень мал как для закрытого ключа, так и для открытых ключей.

В процессе шифрования и дешифрования каждому из них требуется примерно 512 умножений двух чисел по 512 бит по модулю 512 бит для обработки сообщения длиной 512 бит.

Поэтому можно сделать вывод о том, что размер открытого ключа для системы НФЕ намного больше, чем для системы RSA. С точки зрения эффективности сравнение происходит между RSA, которая требует умножения двух 512-битных чисел по модулю другого 512-битного числа и многомерной квадратичной системой НФЕ, которая представляет собой операцию решения более 10 линейных уравнений над конечным полем размера 2^8 .

Можно предположить, что система будет безопаснее, чем система RSA, если передача ключа будет использоваться только один раз и мы увеличим степень размерности конечных полей.

С учетом изложенного, можно сделать вывод о том, что алгоритмы, основанные на многомерных квадратичных системах, считаются до-

статочно стойкими при использовании для криптоанализа возможностей большинства современных средств вычислительной техники.

Список литературы

1. Мацумото Т., Имаи Х. Класс асимметричных криптосистем, основанных на полиномах над конечными полями // IEEE International Symposium Information Theory, St. Jovite. Canada, 1983. С. 131–132.

2. Patarin J. Hidden Field Equations (HFE) and Isomorphisms of Polynomials (IP): two new Families of Asymmetric Algorithms. URL: https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F3-540-68339-9_4.pdf.

3. Jintai D., Jason E., Schmidt S. Multivariate Public Key Cryptosystems. Germany, 2006. 250 с.

5. НЕЙРОМАТЕМАТИКА И НЕЙРОКОМПЬЮТЕРЫ

УДК 378:004.032.26

Применение нейронных сетей к распознаванию негативного текста в социальных сетях

Вадим Олегович Устимов¹, Татьяна Вячеславовна Черушева²

^{1,2} Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
¹ustimovvadim@mail.ru, ²tank1100@yandex.ru

Аннотация. Представлено решение задачи использования нейронных сетей для распознавания негативного текста в социальных сетях. Строится модель нейронной сети с использованием блоков LSTM и проводится эксперимент по классификации текста.

Ключевые слова: искусственные нейронные сети, сети LSTM, функция активации, лемматизация, токенизация

Application of neural networks to the recognition of negative text in social networks

Vadim O. Ustimov¹, Tat'yana V. Cherusheva²

^{1,2} Penza State University, Penza, Russia
¹ustimovvadim@mail.ru, ²tank1100@yandex.ru

Abstract. The paper solves the problem of using neural networks to recognize negative text in social networks. A neural network model is constructed using LSTM blocks and a text classification experiment is performed.

Keywords: artificial neural networks, LSTM networks, activation function, lemmatization, tokenization

В современном мире все чаще актуальными становятся вопросы влияния сетевых ресурсов на развитие личности. Социальные сети несут в себе большое количество позитивно и негативно влияющей на человека информации. Оценить это влияние, отделить «положительное» от «отрицательного» – это и является задачей обнаружения и фильтрации негативной информации с использованием искусственной нейронной сети (ИНС).

В данной статье строится и реализуется математическая модель нейронной сети, распознающей негативный текст. Традиционно задачи делятся на «обучение без учителя», и на «обучение с учителем». Задачи «обучения с учителем» включают задачи классификации данных, где

каждому объекту необходимо связать элемент некоторого конечного набора, называемого меткой класса.

Классификация данных решает следующую проблему. Дан конечный набор классов: положительный отзыв (1), отрицательный отзыв (0). Есть множество объектов, и известно, к какому классу они принадлежат. Тренировочным множеством называется последовательность данных, которыми оперирует нейронная сеть. Принадлежность проверочных данных конкретному классу неизвестна. Требуется построить алгоритм, способный классифицировать любой объект из проверочного набора.

Для обучения нейронной сети был использован Dataset с короткими текстами [1]. Поскольку нейронная сеть работает с числовыми значениями, необходимо сформировать числовой входной вектор значений [2].

Данные загружаются в программу и удаляются все символы кроме кириллицы. Чтобы избежать «засорения словаря» словами с разными падежами или склонениями, проведем лемматизацию, получив нормальную (начальную, или словарную) форму слова. Далее следует процесс токенизации [3].

Токенизация – это процесс, посредством которого большое количество текста делится на более мелкие части (тексты на предложения, предложения на слова), называемые токенами.

Производится подсчет каждого токена в тексте и сортировка от наиболее популярных к менее популярным токенам. Первые 6000 будут являться словарем, на базе которого будет проходить обучение и тестирование нейронной сети. Далее происходит процесс векторизации - процесс конвертации текста в числа.

Каждая запись в Dataset проходит обработку. Если слово из записи есть в словаре, то это слово заменяется на число, соответствующее ему из словаря. В работе используются сети долго-краткосрочной памяти (Long Short Term Memory - LSTM) [5]. Сети LSTM - особый вид рекурсивных нейронных сетей (РНС), способных к обучению долгосрочным зависимостям. LSTM-сеть – это искусственная нейронная сеть, содержащая LSTM-модули вместо или в дополнение к другим сетевым модулям. LSTM-модуль – это рекуррентный модуль сети, способный запоминать значения как на короткие, так и на длинные промежутки времени.

Слой Embedding [4] (рисунок 1) преобразует положительные целые числа (индексы) в плотные (dense) векторы фиксированного размера.

Нейронная сеть состоит из 3 слоев:

- входной слой Embedding создает плотное векторное представление слов, длина вектора 8;
- второй слой LSTM имеет 32 модуля;
- выходной слой состоит из одного нейрона с функцией активации сигмоид.

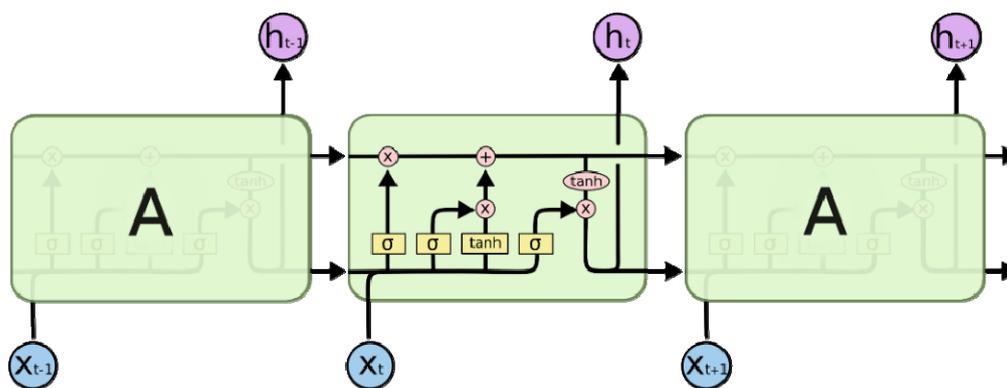


Рис. 1. Структура сети LSTM

Обучение нейронной сети происходит за 65 эпох, и сохраняется модель с лучшим результатом на проверочном наборе.

На рисунке 2 представлены графики зависимости количества эпох от доли верных ответов на обучающем и проверочном наборах.

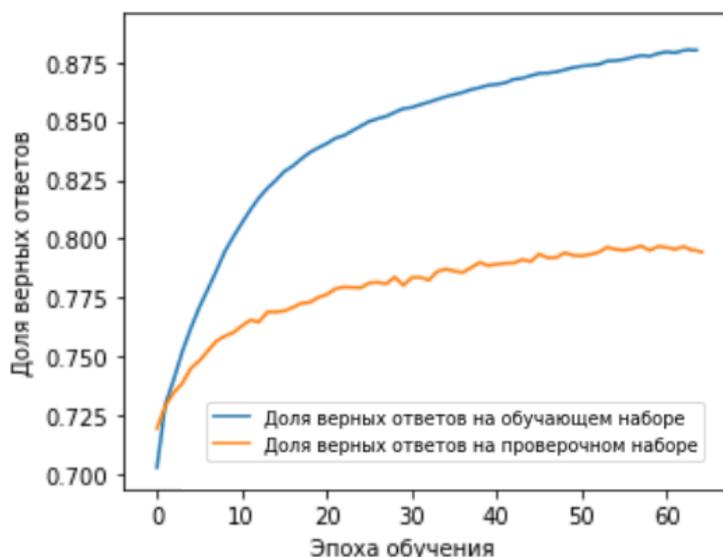


Рис. 2. График зависимости количества эпох от доли верных ответов на обучающем и на проверочном наборе

Анализируя рисунок 2, можно сказать, что, начиная с 54 эпохи доля верных ответов остается неизменной и далее ухудшается, что говорит о переобучении.

На рисунках 3–5 представлены результаты работы нейронной сети: позитивные комментарии; негативные комментарии; нейтральные комментарии, где нейронная сеть не смогла дать правильный ответ или не была в этом уверена. Значения близкие к 1, например, 0.9940543 соответствуют тому, что нейронная сеть уверена, что перед ней позитивный комментарий, а числа близкие к 0, например 0.01722956, соответствуют тому, что нейронная сеть уверена, что перед ней негативный комментарий.

```

Оригинальный комментарий: здорово)) желаю удачи
Обработанный комментарий: здорово желать удача
[[0.9940543]]
Позитивный комментарий
-----

Оригинальный комментарий: Ахаха Насть, я уже предвкушаю это!)
Обработанный комментарий: ахах настя я уже предвкушать это
[[0.91015506]]
Позитивный комментарий
-----

```

Рис. 3. Позитивные комментарии

```

Оригинальный комментарий: Голова болит безумно, еще эти уроки и репетитор
Обработанный комментарий: голова болеть безумно ещ этот урок и репетитор
[[0.01722956]]
Негативный комментарий
-----

Оригинальный комментарий: Гнида такая день испортил
Обработанный комментарий: гнида такой день испортить
[[0.06562123]]
Негативный комментарий
-----

```

Рис. 4. Негативные комментарии

```

Оригинальный комментарий: всякое бывает, забудь
Обработанный комментарий: всякий бывает забыть
[[0.34309375]]
Негативный комментарий
-----

Оригинальный комментарий: ладно, еще увидимся
Обработанный комментарий: ладный ещ увидеться
[[0.82972425]]
Позитивный комментарий
-----

Оригинальный комментарий: за сколько взял?
Обработанный комментарий: за сколько взял
[[0.63552046]]
Позитивный комментарий
-----

```

Рис. 5. Нейтральные комментарии

По рисункам 3-5 видно, что нейронная сеть уверенно определяет явно позитивные (0.9940543, 0.91015506, близкие к 1) и явно негативные отзывы (0.01722956, 0.06562123, близкие к 0). На нейтральных комментариях сеть не дает таких точных результатов.

Нейронная сеть, обрабатывая случайный текст или комментарий из социальных сетей, может не знать каких-либо слов, так как выбранный словарь для обучения ограничен набором в 6000 слов. В этом случае нужно в разработанной ИНС, позволяющей отслеживать негативную информацию в социальных сетях, использовать большую в 3–4 раза Dataset и привлекать более мощные вычислительные ресурсы.

Список литературы

1. Russian_twitter_sentiment. URL: <https://www.kaggle.com/thorinhood/russian-twitter-sentiment> (дата обращения: 03.05.2021).
2. Савельев А. В. На пути к общей теории нейросетей. К вопросу о сложности // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. 2006. № 4-5. С. 4–14.
3. Гречачин В. А. К вопросу о токенизации текста // Международный научно-исследовательский журнал. 2016. № 6, ч. 4. С. 25–27.
4. Embedding layer. URL: <https://ru-keras.com/embedding-layers> (дата обращения: 06.05.2021).
5. Understanding LSTM Networks. URL: <http://colah.github.io/posts/2015-08-Understanding-LSTMs> (дата обращения: 05.05.2021)

**Решение обратных краевых задач, описывающих процессы
в кусочно-однородной среде, на сетях радиальных
базисных функций методом Левенберга – Марквардта**

Дмитрий Александрович Стенькин¹, Владимир Иванович Горбаченко²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹stynukin@mail.ru, ²gorvi@mail.ru

Аннотация. Показано применение сетей радиальных базисных функций в качестве физико-ориентированных нейронных сетей для решения прямых и обратных краевых задач, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных. Для решения коэффициентной обратной задачи восстановления свойств кусочно-неоднородной среды предложен алгоритм, основанный на параметрической оптимизации. Алгоритм применяет две сети радиальных базисных функций, одна из которых аппроксимирует решение прямой задач, а вторая аппроксимирует функцию, описывающую свойства среды. Обучение сетей производится с помощью разработанного авторами алгоритма на основе метода Левенберга – Марквардта. Получены выражения для аналитического вычисления элементов матрицы Якоби в методе Левенберга – Марквардта. Применение разработанного алгоритма продемонстрировано на примере модельной коэффициентной обратной задачи для кусочно-однородной среды.

Ключевые слова: метод Левенберга – Марквардта, физико-ориентированные нейронные сети, уравнения в частных производных, сети радиальных базисных функций, обратные задачи, обучение нейронной сети

**Solution of inverse boundary value problems describing processes
in a piecewise homogeneous medium on radial basis function
networks by the Levenberg – Marquardt method**

Dmitriy A. Sten'kin¹, Vladimir I. Gorbachenko²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹stynukin@mail.ru, ²gorvi@mail.ru

Abstract. The application of radial basis function networks as physics-informed neural networks for solving direct and inverse boundary value problems described by partial differential equations is shown. To solve the coefficient inverse problem of recovering the properties of a piecewise inhomogeneous medium, an algorithm based on parametric optimization is proposed. The algorithm uses two radial basis function networks, one of which approximates the solution of direct problems, and the second approximates a function that describes the properties of the medium. Network training is performed using an algorithm developed by the authors based

on the Levenberg – Marquardt method. Expressions for the analytical calculation of the elements of the Jacobi matrix in the Levenberg – Marquardt method are obtained. The application of the developed algorithm is demonstrated by the example of a model coefficient inverse problem for a piecewise homogeneous medium.

Keywords: Levenberg – Marquardt method, physics-informed neural networks, partial differential equations, radial basis function networks, inverse problems, neural network learning

Известным подходом к решению краевых задач на нейронных сетях является использование сетей радиальных базисных функций (СРБФ) [1–2]. Такой подход не требует построения сетки и позволяет получить приближенное дифференцируемое аналитическое решение в произвольных точках области. В таких сетях могут настраиваться не только линейные элементы (веса), но и нелинейные элементы (параметры радиальных базисных функций). СРБФ содержат только два слоя. Эти особенности делают СРБФ гибкими и открывают широкие возможности применения различных алгоритмов обучения.

При использовании СРБФ обычно рассматривают задачи, описывающие процессы в однородных средах [1–2]. Но многие практически чрезвычайно важные задачи, например, моделирование нефтяных месторождений [3], моделирование фильтрации подземных вод [4] требуют рассмотрения кусочно-однородных сред. В обратной задаче параметры уравнения, граничные или начальные условия не заданы, и их необходимо определить по некоторой дополнительной информации, например, приближенно измеренным значениям решения в некоторых точках [5]. Обратные задачи, как правило, некорректны и требуют использования методов регуляризации для решения.

Рассмотрим коэффициентную обратную задачу определения неизвестной функции, характеризующей неоднородную среду, по результатам измерения решения в нескольких точках. Такие задачи возникают при определении свойств материалов, обнаружении аномалий в некоторой среде, обнаружении объектов и многих других. В [6] с использованием СРБФ методом конечных разностей решена коэффициентная обратная задача. Бессеточными методами задача не решалась. Задача описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(k(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) = f(\mathbf{x}), \quad (2)$$

где $k(\mathbf{x})$ – неизвестная функция, описывающая среду, \mathbf{x} – вектор координат,

Граничные условия имеют вид

$$Bu(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}), \quad (2)$$

Необходимо найти решение u и функцию $k(\mathbf{x})$ по решению, известному в некотором множестве точек

$$u(\mathbf{z}) = \psi(\mathbf{z}), \quad \mathbf{z} \in Z, \quad Z \subset \Omega \cup \partial\Omega, \quad (3)$$

причем $\psi(\mathbf{z})$ в реальных задачах является результатом измерения с некоторой погрешностью.

Используем параметрическую оптимизацию [5]. Для этого неизвестную функцию $k(\mathbf{x})$ аппроксимируем СРБФ

$$k_{RBF}(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{M_k} w_m^k \varphi_m^k(\mathbf{x}; \mathbf{p}_m^k), \quad (4)$$

где M_k – количество радиальных базисных функций, w_m^k , \mathbf{p}_m^k – веса и параметры радиальных базисных функций, φ_m^k – радиальная базисная функция.

Решение u прямой задачи, в которой функция $k(\mathbf{x})$ аппроксимируется сетью (4) аппроксимируем второй СРБФ

$$u_{RBF}(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{M_u} w_m^u \varphi_m^u(\mathbf{x}; \mathbf{p}_m^u), \quad (5)$$

где M_u – количество РБ-функций, w_m^u , \mathbf{p}_m^u – веса и векторы параметров радиальных базисных функций φ_m^u .

Решение обратной задачи формируется в процессе обучения сети радиальных базисных функций. Обучение представляет собой настройку весов и параметров радиальных базисных функций двух сетей в процессе минимизации функции потерь. Так как в нашей задаче целевые значения для обучения сети не известны, построим функцию потерь в виде суммы квадратов невязок приближенного решения в пробных точках внутри, на границе области решения и в точках дополнительных условий (3)

$$I = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [Lu(\mathbf{x}_i, k(\mathbf{x}_i)) - f(\mathbf{x}_i)]^2 + \frac{\lambda_B}{2} \sum_{j=1}^K [Bu(\mathbf{x}_j) - p(\mathbf{x}_j)]^2 + \frac{\lambda_D}{2} \sum_{m=1}^S [u(\mathbf{x}_m) - \psi(\mathbf{x}_m)]^2, \quad (6)$$

где $Lu(\mathbf{x}_i, k(\mathbf{x}_i))$ – дифференциальный оператор уравнения (1), $Bu(\mathbf{x}_j)$ – оператор граничных условий (2), N – количество пробных точек внутри

области, K – количество пробных точек, на границе области, S – количество точек дополнительных условий, λ_B, λ_D – штрафные множители, \mathbf{x}_i , \mathbf{x}_j и \mathbf{x}_m – координаты пробных точек внутри, на границе области и координаты точек дополнительных условий, множитель $1/2$ введен для упрощения вычислений.

Обратные задачи являются некорректными. Для рассматриваемой задачи целесообразно применить метод итерационной регуляризации (условие Морозова) [7]. В роли регуляризатора выступает число итераций: обучение сети продолжается до тех пор, пока

$$\sum_{m=1}^S [u(\mathbf{x}_m) - \psi(\mathbf{x}_m)]^2 > S\delta^2,$$

где δ – абсолютная погрешность измерения решения в точках дополнительных условий (3).

Примем граничные условия первого рода $u(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, в качестве радиальных базисных функций используем функцию Гаусса (Гауссиан)

$$\varphi(\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|, a) = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\|^2}{2a^2}\right),$$

где \mathbf{c} – координаты центра функции, a – параметр формы (ширина). Результаты несложно обобщить на другие граничные условия и базисные функции. Тогда дифференциальный оператор примет вид

$$Lu(\mathbf{x}_i, k(\mathbf{x}_i)) = S_1(\mathbf{x}_i)S_2(\mathbf{x}_i) + S_3(\mathbf{x}_i)S_4(\mathbf{x}_i) + S_5(\mathbf{x}_i)S_6(\mathbf{x}_i), \quad (7)$$

где

$$S_1(\mathbf{x}_i) = \sum_{m=1}^{M_k} \left[\frac{w_m^k}{(a_m^k)^2} \varphi_m^k(\mathbf{x}_i) \cdot (x_{i1} - c_{m1}^k) \right],$$

$$S_2(\mathbf{x}_i) = \sum_{m=1}^{M_u} \left[\frac{w_m^u}{(a_m^u)^2} \varphi_m^u(\mathbf{x}_i) \cdot (x_{i1} - c_{m1}^u) \right],$$

$$S_3(\mathbf{x}_i) = \sum_{m=1}^{M_k} \left[\frac{w_m^k}{(a_m^k)^2} \varphi_m^k(\mathbf{x}_i) \cdot (x_{i2} - c_{m2}^k) \right],$$

$$S_4(\mathbf{x}_i) = \sum_{m=1}^{M_u} \left[\frac{w_m^u}{(a_m^u)^2} \Phi_m^u(\mathbf{x}_i) \cdot (x_{i2} - c_{m2}^u) \right],$$

$$S_5 = \sum_{m=1}^{M_k} w_m^k \Phi_m^k(\mathbf{x}_i), \quad S_6(\mathbf{x}_i) = \sum_{m=1}^{M_u} \left[w_m^u \Phi_m^u(\mathbf{x}_i) \cdot \left(\frac{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{c}_m^u\|^2 - 2(a_m^u)^2}{(a_m^u)^4} \right) \right].$$

Для обучения сети использован алгоритм метода Левенберга – Марквардта, адаптированный для обучения СРБФ [8]. Рассмотрим единый вектор параметров сетей u_{RBF} и k_{RBF}

$$\Theta = \begin{bmatrix} w_1^u & \cdots & w_{n_{RBF}^u}^u & | & c_{11}^u & \cdots & c_{n_{RBF}^u}^u & | & c_{12}^u & \cdots & c_{n_{RBF}^u}^u & | & a_1^u & \cdots & a_{n_{RBF}^u}^u & | & \vdots \\ w_1^k & \cdots & w_{n_{RBF}^k}^k & | & c_{11}^k & \cdots & c_{n_{RBF}^k}^k & | & c_{12}^k & \cdots & c_{n_{RBF}^k}^k & | & a_1^k & \cdots & a_{n_{RBF}^k}^k & | & \vdots \end{bmatrix}$$

где верхний индекс означает принадлежность сети u_{RBF} или k_{RBF} , n_{RBF}^u и n_{RBF}^k – количество базисных функций (нейронов) в сетях.

На k -ой итерации алгоритма Левенберга-Марквардта вектор параметров сетей корректируется на вектор поправки $\Delta\Theta^{(k)}$ параметров сети, формируемый как результат решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\left(\mathbf{J}_{k-1}^T \mathbf{J}_{k-1} + \mu_k \mathbf{E} \right) \Delta\theta^{(k)} = -\mathbf{g}_{k-1},$$

где \mathbf{J}_{k-1} – матрица Якоби, вычисленная по значениям параметров сети в $k-1$ итерации, \mathbf{E} – единичная матрица, μ_k – параметр регуляризации, изменяемый в каждой итерации, $\mathbf{g}_{k-1} = \mathbf{J}_{k-1}^T \mathbf{r}_{k-1}$ – градиент функционала ошибки по вектору параметров $\theta^{(k-1)}$, $\mathbf{r}^{(k-1)}$ – вектор невязок в пробных точках.

Последовательно пронумеруем невязки в пробных точках: $1, 2, \dots, N, N+1, \dots, N+K, N+K+1, \dots, N+K+S$ и представим матрицу Якоби в блочном виде

$$\mathbf{J} = \left[\mathbf{J}_w^u \mid \mathbf{J}_{c_1}^u \mid \mathbf{J}_{c_2}^u \mid \mathbf{J}_a^u \mid \mathbf{J}_w^k \mid \mathbf{J}_{c_1}^k \mid \mathbf{J}_{c_2}^k \mid \mathbf{J}_a^k \right]. \quad (8)$$

Элементы матрицы (8) вычислялись аналитически. Например, элементы матрицы \mathbf{J}_w^u для внутренних пробных точек вычисляются по формуле

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_i}{\partial w_p^u} = & S_1(\mathbf{x}_i) \cdot \frac{\varphi_p^u(\mathbf{x}_i) \cdot (x_{i1} - c_{p1}^u)}{(a_p^u)^2} + S_3(\mathbf{x}_i) \cdot \frac{\varphi_p^u(\mathbf{x}_i) \cdot (x_{i2} - c_{p2}^u)}{(a_p^u)^2} + \\ & + S_5(\mathbf{x}_i) \cdot \varphi_p^u(\mathbf{x}_i) \cdot \frac{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{c}_p^u\|^2 - 2(a_p^u)^2}{(a_p^u)^4}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

где $\varphi_p^u(\mathbf{x}_i)$ – значение p -й базисной функции сети u_{RBF} в пробной точке \mathbf{x}_i , \mathbf{c}_p^u и a_p^u – параметры p -ой базисной функции сети u_{RBF} в пробной точке \mathbf{x}_i .

Для граничных пробных точек вычисления производятся по формуле $\frac{\partial r_j}{\partial w_p^u} = \varphi_p^u(\mathbf{x}_j)$, $j = 1, 2, \dots, K$. Для точек дополнительного условия

элементы матрицы имеют вид $\frac{\partial r_m}{\partial w_p^u} = \varphi_p^u(\mathbf{x}_m)$, $m = 1, 2, \dots, S$. Аналогично

вычисляются другие элементы матрицы (8).

Эксперименты проводились на модельной задаче для кусочно-однородной среды. Предварительно на СРБФ решена прямая задача

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma_i(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma_i(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad i = 1, 2, \\ u(x, y) = p(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

где Ω – расчетная область; $\partial\Omega$ – граница расчетной области; $f = \sin(2\pi x_1) \cdot \sin(\pi x_2)$, $p = 0$, σ_i – функция, описывающая свойства среды. Расчетной областью является квадрат 1×1 , при $x = 0.5$ разделенный вертикальной линией на две подобласти с постоянными значениями: для $x < 0.5$ $\sigma_1 = 2$, для $x > 0.5$ $\sigma_2 = 5$. На границе сопряжения сред выполняются условия сопряжения

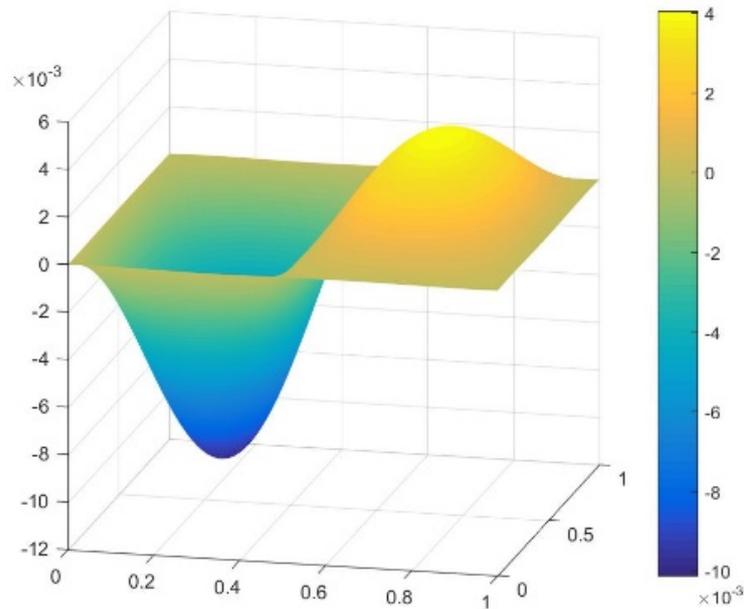
$$u_1|_S = u_2|_S, \quad \sigma_1 \frac{du_1}{dx} \Big|_S = \sigma_2 \frac{du_2}{dx} \Big|_S.$$

Для решения прямой задачи использован подход, предложенный в [9]. Задача решалась как две задачи для двух областей с учетом условий сопряжения. Для каждой области количество базисных функций равно 64, в каждой области использовалось по 80 пробных точек внутри области решения и на границе, 20 пробных точек располагалось на линии

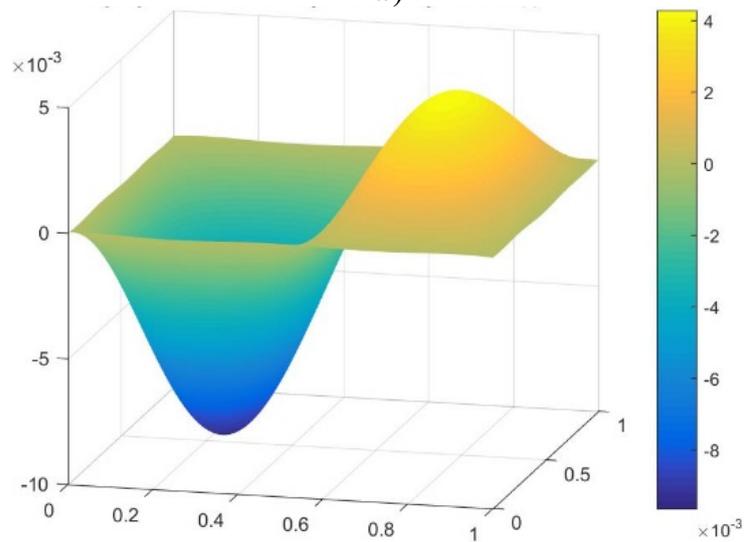
раздела сред. Сети обучались до средней квадратической ошибки, равной 10^{-7} . Решение исходной прямой задачи показано на рис. 1,*а*.

В области решения было взято 40 расположенных на сетке точек, решение в которых принято за значения в точках дополнительных условий (3).

Для решения обратной задачи использовались две описанные сети радиальных базисных функций, каждая из которых содержала 64 базисных функции, $N = K = 80$, $S = 40$, $\lambda_B = \lambda_D = 10$ (см.(6)). Сеть обучалась до среднего квадратического значения функционала ошибки (6), равного 10^{-3} . График восстановленного решения задачи показаны на рис. 1,*б*.



а)



б)

Рис. 1. Результаты экспериментов:
а) решение прямой задачи; *б)* восстановленное решение

Таким образом, предложенный алгоритм обеспечивает эффективное приближенное аналитическое решение обратной краевой задачи для кусочно-однородных сред.

Список литературы

1. Yadav N., Yadav A., Kumar M. An Introduction to Neural Network Methods for Differential Equations. Springer, 2015. 115 p.
2. Горбаченко В. И., Жуков М. В. Решение краевых задач математической физики с помощью сетей радиальных базисных функций // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57, № 1. С. 133–143.
3. Соколов В. С. Моделирование разработки нефтяных и газовых месторождений. Тюмень : ТюмГНГУ, 2014. 146 с.
4. Лукнер Л., Шестаков В. М. Моделирование геофильтрации. М. : Недра, 1976. 407 с.
5. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М. : URSS, 2020. 480 с.
6. Pakravan S., Mistani P. A. [et al.]. Solving inverse-PDE problems with physics-aware neural networks. URL: <https://arxiv.org/abs/2001.03608>
7. Морозов В. А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М. : Наука, 1987. 240 с.
8. Горбаченко В. И., Алкезуини М. М. Моделирование объектов с распределенными параметрами на нейронных сетях // Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе. 2019. № 4 (32). С. 50–64.
9. Stenkin D. A., Gorbachenko V. I. Solving Equations Describing Processes in a Piecewise Homogeneous Medium on Radial Basis Functions Networks // Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research IV. NEUROINFORMATICS 2020. Studies in Computational Intelligence. Cham : Springer, 2021. № 925. P. 412–419.

6. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБРАЗОВАНИИ

УДК 372.851.1

Интенсиональные методы распознавания образов в математическом анализе

Светлана Юрьевна Варлашина¹, Наталья Владимировна Наземнова²

¹Пензенский колледж транспортных технологий, Пенза, Россия

²Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹varlashina-svetlana@mail.ru, ²natalianazemnova@yandex.ru

Аннотация. Рассматриваются интенсиональные методы распознавания образов в математическом анализе. В качестве примера приводится одна из основных тем математического анализа «Исследование функций и построение графиков». Изучение данной темы базируется на основе использования интенсинальных методах распознавания образов. Подчеркивается, что использование интенсинальных методов при формировании действий по распознаванию образов в математическом анализе предполагает овладение не только умением решать задачи определенного типа, но и умением проводить поэтапный анализ своей деятельности, связанной с решением той или иной задачи.

Ключевые слова: интенсинальные методы, распознавание образов, математический анализ, исследование функций, построение графиков, формирование действий по распознаванию образов

Intensive methods of pattern recognition in mathematical analysis

Svetlana Yu. Varlashina¹, Natal'ya V. Nazemnova²

¹Penza College of Transport Technologies, Penza, Russia

²Penza State University, Penza, Russia

¹varlashina-svetlana@mail.ru, ²natalianazemnova@yandex.ru

Abstract. Intensive methods of pattern recognition in mathematical analysis are considered. As an example, one of the main topics of mathematical analysis "Research of functions and plotting" is given. The study of this topic is based on the use of intensive methods of image recognition. It is emphasized that the use of intensive methods in the formation of actions for pattern recognition in mathematical analysis involves mastering not only the ability to solve problems of a certain type, but also the ability to conduct a step-by-step analysis of their activities related to the solution of a particular problem.

Keywords: intensive methods, pattern recognition, mathematical analysis, function research, plotting, forming actions for pattern recognition

Распознаванием образов называются задачи построения и применения формальных операций над числовыми или символическими отображениями объектов реального или идеального мира, результаты решения которых отражают отношения эквивалентности между этими объектами. Математически задача распознавания образов может быть поставлена в следующем виде. Имеется некоторое (возможно, очень большое или даже бесконечное) множество M объектов x , каждый из которых обладает некоторым набором *свойств* (или *признаков*). Не ограничивая общности, можно считать, что все объекты характеризуются одним и тем же набором свойств, причем каждое свойство может принимать значения из некоторого предопределенного множества возможных значений.

Известна следующая классификация методов распознавания образов:

интенциональные – методы, основанные на операциях с признаками и экстенциональные методы, основанные на операциях с объектами. Существование этих двух методов распознавания (оперирующих с признаками и объектами) глубоко закономерно и отражает фундаментальные характеристики взаимодействия реальности и сознания. С этой точки зрения не один из методов, взятый отдельно не позволяет сформировать адекватное отражение реальности и сознания. Стало быть, между этими методами существует отношение дополнительности. Отличительной особенностью интенциональных методов является то, что в качестве элементов они используют различные характеристики признаков.

Группа интенциональных методов обширна, ее деление на подклассы носит в определенной мере условный характер:

1) методы, основанные на оценках распределения значения признаков;

2) методы, основанные на предложениях о классе решающих функций;

3) логические методы – методы базируются на аппарате алгебры, логики и позволяют оперировать информацией, заключенной не только в отдельных признаках, но и в сочетаниях;

4) лингвистические методы – распознавания образов основаны на специальных грамматиках (алгебраической, геометрической), с помощью которых может описываться совокупность свойств распознаваемых объектов;

5) методы, основанные на предположениях о классе решающих функций, основным достоинством метода является ясность постановки задачи не редко достигается с помощью алгоритмов обобщений.

Навыки алгоритмического мышления способствуют формированию целеустремленности, сосредоточенности, логичности, последовательности в планировании и выполнении своих действий, умению четко выражать свои мысли, что способствует быстрому формированию действия по распознаванию образа в математическом анализе [1]. Алгоритм –

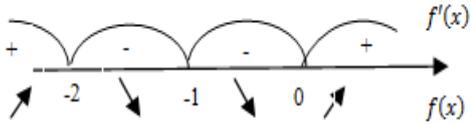
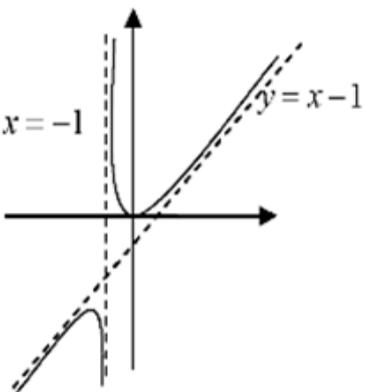
это точно сформулированное правило для достижения необходимости результата. Для всех алгоритмов общим является необходимость строго соблюдения последовательности выполнения действий. В алгоритме не должно быть ошибок. Как известно, самым простым видом алгоритма является линейный алгоритм, предусматривающий выполнение действий в заданном порядке, при этом используется только одна управляющая структура – следование.

Рассмотрим одну из основных тем математического анализа «Исследование функций и построение графиков». Изучение данной темы базируется на основе использования интенциональных методов распознавания образов. Без специально разработанной системы алгоритмов освоить данную тему не представляется возможным. На конкретном примере предложим методику по изучению данной темы. При исследовании функции целесообразно пользоваться следующей схемой, представленной в таблице 1.

Каждый этап исследования функции представляет в свою очередь представляет собой алгоритм определенных действий.

Таблица 1

Этапы исследования функции	На примере функции $y = \frac{x^2}{x+1}$
1. Найти область определения	$D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$
2. Исследовать функцию на четность, нечетность и периодичность	$y(-x) = \frac{x^2}{-x+1} \neq \pm y(x)$ Функция общего вида, непериодическая
3. Найти точки пересечения графика с осями координат	$x = 0 \Rightarrow y = 0$
4. Найти асимптоты графика функции	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{x+1} = \pm\infty \Rightarrow$ $x = -1$ – вертикальная асимптота; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x+1} = \pm\infty \Rightarrow$ горизонтальных асимптот нет; $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x(x+1)} = 1$ $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x(x+1)} - x \right) = -1 \Rightarrow$ $y = x - 1$ – наклонная асимптота

5. Найти интервалы возрастания и убывания, экстремумы функции	$y' = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}, \quad y' = 0$ <p>при $x = -2, x = 0$.</p>  <p>$y_{\min} = y(0) = 0, \quad y_{\max} = y(-2) = 4$</p>
6. Найти интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба графика функции	$y'' = \frac{2}{(x+1)^3}, \quad y'' \neq 0 \Rightarrow \text{точек перегиба нет}$  <p>$(-\infty; -1)$ – интервал выпуклости $(-1; \infty)$ – интервал вогнутости</p>
7. Построить график функции	

Для того чтобы найти область определения функции (1 этап) необходимо: 1) записать условия, при которых выражение $f(x)$ имеет смысл в виде системы неравенств (или одного неравенства); 2) решить полученную систему неравенств; 3) записать область определения функции.

На следующем этапе необходимо исследовать функцию на четность и нечетность: 1) найти $f(-x)$, для любого x входящего в область определения, если $f(-x) = f(x)$, то функция четная; 2) если $f(-x) = -f(x)$, то функция нечетная; 3) если не выполняется первое и второе условие, то общего вида.

При нахождении интервалов непрерывности функции и определении точек разрыва необходимо: 1) выделить точки разрыва функции (т.е. точки, в которых функция непрерывна); 2) найти односторонние пределы в каждой из выделенных точек $\lim_{x \rightarrow x-0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x+0} f(x)$ и значения

функции, если это возможно; 3) сравнить значения односторонних пределов функции в точках возможного разрыва и сделать вывод; 4) начертить эскиз графика функции. Для уточнения графика найти $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$.

Далее определяют точки пересечения графика функции с осями координат: 1) находят точки пересечения с осью OY (вычисляют значения функции $y(x)$, при $x=0$, т.е. $y(0)$); 2) находят точки пересечения с осью OX , решая уравнение $y(x)=0$.

Для нахождения интервалов знакопостоянства функции необходимо:

1) найти область определения функции; 2) найти производную функции;

3) отыскать критические точки; 4) исследовать знаки производной в промежутках; 5) записать промежутки возрастания и убывания функции.

Для нахождения асимптот функции необходимо:

1) найти область определения функции; 2) вычислить пределы функции в точках max и min , которые являются конечными границами интервалов области определения; 3) записать уравнения вертикальных асимптот, если они есть (вертикальные асимптоты находятся как точки бесконечного разрыва функции); 4) записать уравнения горизонтальных асимптот, если существуют т.е.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$$

5) записать уравнения наклонных асимптот (их ищут в виде $y = kx + b$, где $k = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) / x$ и $b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - kx$); 6) если хотя бы один из пределов не существует или является бесконечным, то график наклонных асимптот не имеет.

При нахождении интервалов возрастания и убывания и экстремумов функции необходимо: 1) найти область определения функции; 2) найти производную $f'(x)$; 3) найти критические точки т.е. точки в которых производная функции равна нулю или не существует; 4) в каждом интервале области определения определить знак производной и характер изменения функции (возрастания, убывания); 5) для каждой критической точки определить является ли она точкой экстремума или нет; 6) записать результат исследования функции в промежутках монотонности и экстремумов.

Для того чтобы найти выпуклость и вогнутость функции необходимо: 1) найти область определения; 2) найти производные первого и второго порядка; 3) решить уравнение второй производной равной нулю; 4) исследовать знаки второй производной слева и справа от найденных точек и сделать вывод об интервалах выпуклости и о наличии точек перегиба [2].

При применении этих алгоритмов мы можем видеть, что они могут повторяться – это способствует формированию математических образов при построении графиков функций и умений выделять общие и существенные признаки математических объектов и объединять их в пределах конкретной темы [3].

Использование интенциональных методов при формировании действий по распознаванию образов в математическом анализе предполагает овладение не только умением решать задачи определенного типа, но и умением проводить поэтапный анализ своей деятельности, связанной с решением той или иной задачи.

Список литературы

1. Гусев В. А. Теория и методика обучения математике: психолого-педагогические основы. 2-е изд. (эл.). М. : БИНОМ, 2014.
2. Алгебраический тренажер: пособие для школьников и абитуриентов / под ред. А. Г. Мерзляка, В. Б. Полонского, М. С. Якира. М. : Илекса, 2007. 320 с.
3. Письменный Д. Г. Сборник задач по высшей математике. М. : Айрис-пресс, 2017. С. 320–324.
4. Варлашина С. Ю., Наземнова Н. В. Способы активизации учебной деятельности старшеклассников в процессе их обучения математическим методам распознавания геометрических образов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Гуманитарные науки. 2015. № 2 (34). С. 175–181.
5. Теория распознавания образов. URL: https://ru.m.wikipedia.org/wiki/Теория_распознавания_образов

Специфика преподавания стереометрии в условиях реализации среднего профессионального образования

Наталья Валентиновна Мойко¹, Наталья Васильевна Зверовщикова²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹nataliyavalentinovna@yandex.ru, ²nvz.matematika@yandex.ru

Аннотация. Математическое образование необходимо как часть общей культуры, а поэтому изучение математики в колледже является необходимым. Геометрия всегда считалась одним из самых сложных разделов. В основе умения отыскать путь решения задачи лежат хорошо организованные, системные знания, при которых усвоены не только отдельные факты, но и связи между ними. Задача для преподавателя математики в колледже – вооружить мобильными знаниями, которые при переходе на дальнейшую ступень учебы будут сразу востребованы при изучении высшей математики в вузах.

Ключевые слова: математика в колледже, геометрия, методика преподавания

The specifics of teaching stereometry in the conditions of implementing secondary vocational education

Natal'ya V. Moyko¹, Natal'ya V. Zverovshchikova²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹nataliyavalentinovna@yandex.ru, ²nvz.matematika@yandex.ru

Abstract. Mathematical education is necessary as part of a common culture, and therefore the study of mathematics in college is necessary. Geometry has always been considered one of the most complex sections. At the heart of the ability to find the way to solve the problem is well organized, systemic knowledge, in which not only individual facts are learned, but also the relationship between them. The task for a teacher of mathematics in college is to arm mobile knowledge, which in the transition to the further step of study will be immediately in demand when studying the highest mathematics in universities.

Keywords: mathematics in college, geometry, teaching methods

Первейшим гарантом непогрешимости математического мышления считается то, что исходным пунктом рассуждений и действий в этой науке служат аксиомы.

*Иван Сеченов (1829–1905),
выдающийся физиолог, психолог
и мыслитель-материалист*

Общеизвестный факт: юристы, как и все гуманитарии, не дружны с математикой. Многие, когда их спрашивают о выборе юридического образования, зачастую ссылаются на отсутствие математики среди учебных дисциплин. В этой шутливости есть какая-то правда... Как бы нам не хотелось этот факт отрицать – ведь ум стремится в ту среду, в которой чувствует себя комфортно.

Практика показывает, что среди учащихся алгебра пользуется большей популярностью по сравнению с геометрией. Несмотря на то, что в алгебре оперируют с абстрактными величинами, а в геометрии с вполне конкретными осязаемыми фигурами, которые ближе к жизни, у учащихся все-равно возникают сложности. Многим кажется, что геометрия сложнее, чем алгебра. Проблема не только в том, что нет готового алгоритма решения. На наш взгляд, это связано еще и с тем, что объяснить зачем нужна геометрия – на порядок сложнее, чем алгебра, поскольку множество задач, для которых можно найти применение в бытовой жизни, существенно меньше. В 7 классе, как правило, приводят примеры применения геометрии в строительстве, в архитектуре, в ландшафтном дизайне и т.д. Зачем же, все-таки, юристу нужна геометрия?

Мы не утверждаем, что математика (стереометрия, в частности) необходима юристу как исключительно специальное знание, как способность к высшему математическому оперированию, к математическому творчеству. Мы говорим о развитии философско-математических алгоритмов мышления, о знакомстве с природой математики, о принципах математического рассуждения, ее интеллектуальных методах постижения закономерностей окружающей жизни. Математическое знание, как это ни странно для многих людей, - необходимая составляющая общекультурной концепции правоведов.

Для того, чтобы юридический документ имел силу – он должен опираться на четкую последовательность законов, нормативных актов и т.п. Свободный полет фантазии тут неуместен. В геометрии происходит решение задач с помощью применения последовательности аксиом геометрии, теорем. Способность решать геометрические задачи – отличный способ развить навык написания юридических документов. На геометрических доказательствах можно научить учащихся анализировать, сравнивать, выделять главное, обобщать и систематизировать. Можно обучить отличать верные рассуждения от ложных, не отступать перед сложными вводными и организовывать их в стройную схему.

В профессии юриста можно стать успешным, не являясь отличником по геометрии. Этот раздел математики в какой-то степени больше развивает способность мыслить и анализировать, поэтому качественное изучение геометрии в системе среднего профессионального образования может существенно упростить погружение в новую для себя область в будущем. Систематическое использование на занятиях специальных задач и заданий, направленных на развитие логического мышления, рас-

ширяет математический кругозор учащихся и позволяет более уверенно ориентироваться в простейших закономерностях окружающей их действительности и активнее использовать математические знания в повседневной жизни.

Знание принципов квалиметрии имеет значение в формировании способности выстраивания различного рода субординаций в зависимости от количества позитивных свойств (законодательных актов, доказательств и т. п.). Теория строгости математических доказательств не заменима в качественном усвоении одного из самых значимых разделов юриспруденции – доказательственного права.

Весь окружающий нас мир наполнен образами геометрических фигур и отношений. Априори геометрия формировалась как наука о непосредственно наблюдаемом пространстве. И, в то же время, именно геометрия больше всего вызывает трудностей у студентов средних специальных учебных заведений, чем любая другая математическая дисциплина. Эти трудности проявляются еще при учебе в школе и носят как предметный, так и психологический характер. В курсе изучения математики в многопрофильном колледже наибольшие трудности возникают у студентов именно при изучении тем стереометрии. Изучение данного материала очень важно для развития пространственного представления и пространственного мышления студентов. Усвоение геометрического материала предполагает его связь с реальными объектами, выбором реальной модели геометрического объекта. Однако от учащихся уже требуется анализ. Наш опыт обучения стереометрии в юридическом колледже показывает, что для многих обучающихся наибольшие затруднения вызывают именно стереометрические задачи. При знакомстве с аксиомами стереометрии пространственные представления учащихся развиты очень слабо. Начальные сведения по стереометрии имеют абстрактный характер, усвоение материала строится на заучивании. К сожалению, теряется интерес к предмету, многие считают стереометрию очень трудным предметом. Трудности в изучении стереометрии вызваны тем, что зрительное восприятие геометрических объектов не всегда соответствует тем закономерностям, которыми этот объект обладает. Отображение тел в пространстве на плоскость при построении чертежа приводит к тому, что очень многие закономерности представляются в искаженном виде.

Построение изображения круглых тел требует определенных навыков. Шар принято изображать в ортогональной проекции. При этом проекцией шара является круг. Чтобы изображение шара сделать более наглядным, кроме контурной окружности изображают еще большую окружность – экватор в виде эллипса, а иногда и диаметр шара, перпендикулярный к плоскости экватора, концы которого (полюсы шара) располагаются внутри контурной окружности (рис. 1). Шар можно получить при вращении полукруга вокруг диаметра. Границей шара служит сфера. Прямой круговой цилиндр, а только такой и рассматривается в

курсе геометрии средней школы, можно рассматривать как тело, полученное при вращении прямоугольника вокруг его стороны. Основания цилиндров изображаются в виде равных эллипсов, контурные образующие—как касательные к ним.

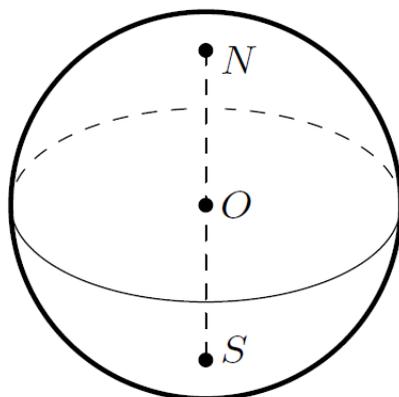


Рис. 1. Шар

Прямой конус можно рассматривать как тело, полученное при вращении прямоугольного треугольника вокруг его катета. При изображении конуса необходимо учитывать, что касательные к эллипсу, построенные в концах одного из его диаметров, параллельны. Поэтому контурные образующие не должны проходить через вершины эллипса, изображающего основание конуса (рис. 2). При решении простейших задач, как и задач на комбинацию круглых тел, можно пользоваться упрощенным чертежом, например, изображением лишь осевого сечения фигуры.

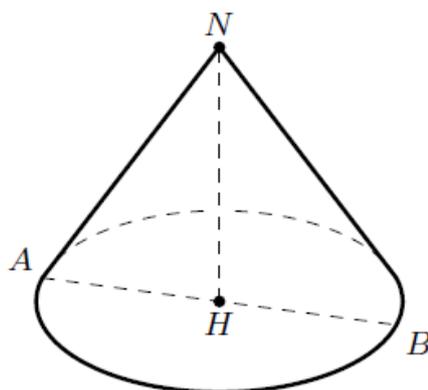


Рис. 2. Конус

Пример 1. В сферу вписан конус. Площадь боковой поверхности конуса составляет $\frac{3}{8}$ площади сферы. Найти угол наклона образующей конуса к плоскости основания.

Решение. Сечение конуса и сферы плоскостью, проходящей через высоту NH конуса, есть равнобедренный треугольник ABN , вписанный в окружность (рис. 3).

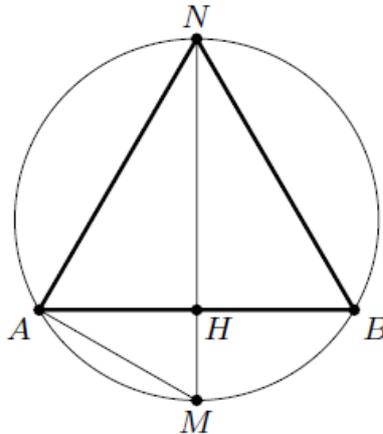


Рис. 3. Иллюстрация примера

Продолжим высоту NH треугольника до пересечения с окружностью в точке M . Тогда MN – диаметр сферы, $\angle MAN = 90^\circ$, AH – радиус основания конуса, $\angle HAN$ – угол наклона образующей к плоскости основания, причем $\angle NAH = \angle AMN$. Обозначим $MN = 2R$, $AH = r$, $AN = l$ и $\angle HAN = x$. Согласно условию задачи, имеем: $\pi r l = \frac{3}{8} \cdot 4\pi R^2$, или

$2rl = 3R^2$. Из прямоугольных треугольников AMN и AHN находим: $l = 2R \sin x$, $r = l \cos x = 2R \sin x \cos x$. Подставив значения l и r в предыдущее равенство, получим тригонометрическое уравнение: $8 \sin^2 x \cos x = 3$, $0^\circ < x < 90^\circ$, которое равносильно уравнению: $8 \cos^3 x - 8 \cos x + 3 = 0$. Полагая $2 \cos x = z$, получим: $z^3 - 4z + 3 = 0$. Это уравнение решим путем разложения девои части на множители: $z^3 - z - 3z + 3 = 0$, $(z - 1)(z^2 + z - 3) = 0$. Положительные корни уравнения $z_1 = 1$ и $z_2 = \frac{\sqrt{13} - 1}{2}$ удовлетворяют условию задачи. Таким образом, $\cos x = \frac{1}{2}$ и $\cos x = \frac{\sqrt{13} - 1}{4}$. Задача имеет два решения: $x_1 = \frac{\pi}{3}$

и $x_2 = \arccos \frac{\sqrt{13} - 1}{4}$.

Большинство задач сводятся к планиметрическим. Для их решения используются методы алгебры и тригонометрии.

Знание начал стереометрии – необходимая составляющая общекультурной концепции правоведов. Авторитетность этой составляющей в выработке склонности, способности к математическому обоснованию

ванию сложно переоценить. Можно сказать по-другому: «Математика необходима для выработки дисциплинированного, неукоснительно последовательного, обоснованного, беспристрастного мышления юриста». В работе юриста знание естественных наук просто необходимо, так как зачастую криминалист должен моментально выдвигать версии по работе, и часто для этого необходимы детали, которые можно подметить только при знании физики ли, математики ли или других наук.

Особенности изучения многогранников обучающимися по программе среднего профессионального образования

Екатерина Юрьевна Бельдягина¹, Лилия Александровна Купряшина²

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹belkapnzpgy@mail.ru, ²liliya_sl@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются особенности изучения стереометрии обучающимися по программе среднего профессионального образования на примере темы «Многогранники». Предлагаются различные варианты организации занятий по данной теме. Представлены классификация, определение, элементы многогранников. Подробно описан способ введения понятия «многогранник» по аналогии с многоугольником.

Ключевые слова: обучение математике по программе среднего профессионального образования, введение понятия «Многогранник», аналогия многоугольник-многогранник

Features of studying polyhedra by students of the secondary vocational education program

Ekaterina Yu. Bel'dyagina¹, Liliya A. Kupryashina²

Penza State University, Penza, Russia

¹belkapnzpgy@mail.ru, ²liliya_sl@mail.ru

Abstract. The article deals with the features of studying stereometry by students of secondary vocational education on the example of the topic "Polyhedra". Various options for organizing classes on this topic are offered. The classification, definition, and elements of polyhedra are presented. The method of introducing the concept of "polyhedron" by analogy with a polygon is described in detail.

Keywords: teaching mathematics according to the program of secondary vocational education, introduction of the concept of "Polyhedron", analogy of a polygon-polyhedron

Раздел «Стереометрия» является завершающим в курсе «Математика» для студентов СПО и вызывает наибольшие трудности при обучении, которые возникают в результате следующих факторов. Во-первых, в колледже на стереометрию отведено 44 часа, что на много меньше чем в школе. Во-вторых, понятия, изучающиеся в рассматриваемом разделе, предполагают максимальную наглядность, сложно реализуемую только с помощью мела и доски. В-третьих, все стереометрические понятия тесно связаны с изученным ранее (7-9 класс) разделом «Планиметрия».

Поэтому, при введении студентам СПО стереометрических понятий наиболее эффективно сочетание мультимедийных средств с традиционными методами обучения, параллельного введения новых понятий с повторением изученного ранее материала.

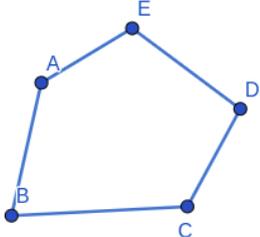
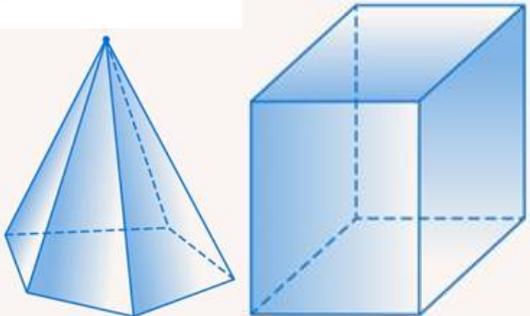
Рассмотрим особенности изучения стереометрии на примере темы «Многогранники», которая является одной из первых и ключевых в данном разделе. Тема «Многогранники» одна из центральных в традиционном курсе стереометрии. Многогранники представляют чрезвычайно содержательный предмет исследования, выделяясь среди всех тел многими интересными свойствами, специально к ним относящимися теоремами и задачами. Многогранникам дают особенно богатый материал для развития пространственных представлений, для развития того соединения живого пространственного воображения со строгой логикой, которое составляет сущность геометрии.

Многогранники являются пространственными аналогами многоугольников. Это позволяет использовать аналогию плоскость — пространство для поиска некоторых свойств многогранников. Проведем аналогию с понятием многоугольника. Для этого удобно рассмотреть следующую таблицу (табл. 1).

Рассмотренный подход позволяет визуализировать учебный материал, давая возможность для быстрого воспроизведения большого объема информации и успешно изучить основные определения данной темы, сформировать у студентов способность к самостоятельным обобщениям, к осмысленному и умелому использованию специальных методов познания. Подводит к самостоятельному открытию того или иного математического факта, возможности применения известного математического факта в новой ситуации.

Таблица 1

Аналогия многоугольник-многогранник

Многоугольники	Многогранники
Определение	
<p>Многоугольник – замкнутая линия (ломаная) без самопересечений, составленная из отрезков (звеньев)</p> 	<p>Многогранник – поверхность, составленная из многоугольников и ограничивающая некоторое геометрическое тело.</p> 

Основные элементы			
<p>Вершины ломаной называются вершинами многоугольника, а ее звенья — сторонами многоугольника. Число сторон многоугольника совпадает с числом его вершин.</p> <p>Диагоналями называются отрезки, соединяющие несоседние вершины многоугольника.</p> <p>Углом (или внутренним углом) плоского многоугольника при данной вершине называется угол между двумя сторонами, сходящимися в этой вершине. Число углов простого многоугольника совпадает с числом его сторон или вершин.</p>		<p>Многоугольники, ограничивающие многогранник, называются его <i>гранями</i>.</p> <p>Стороны граней называются <i>ребрами</i>, а концы ребер - <i>вершинами</i> многогранника. Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называется <i>диагональю</i> многогранника.</p>	
Виды			
Выпуклые	Невыпуклые	Выпуклые	Невыпуклые
<p>Выпуклый многоугольник – это многоугольник, который лежит по одну сторону от любой прямой, содержащей его сторону (то есть продолжения сторон многоугольника не пересекают друг друга его сторон).</p>	<p>Невыпуклыми являются все остальные многоугольники</p>	<p>Если в многограннике провести плоскость через любую грань и весь многогранник всегда будет оставаться с одной стороны, то его будут называть выпуклым</p>	<p>Если хотя бы одна такая плоскость разрезает многогранник, то он невыпуклый</p>

Среди выпуклых многоугольников выделяют:

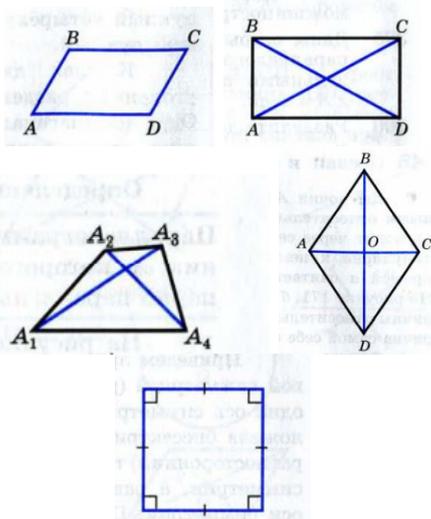
Параллелограмм – это четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

Прямоугольник – это параллелограмм, у которого все углы прямые.

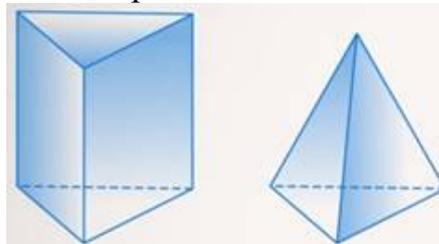
Ромб – это параллелограмм, у которого все стороны равны.

Квадрат – это параллелограмм, у которого все стороны равны и все углы прямые.

Трапеция – это выпуклый четырехугольник, у которого параллельны только две стороны.



Среди выпуклых многогранников существуют две группы наиболее простых и одновременно изучаемых: призмы и пирамиды



Призма – это многогранник, две грани которого являются равными многоугольниками, лежащими в параллельных плоскостях, а остальные грани – параллелограммами, имеющими общие стороны с этими многоугольниками. Две грани, образованные равными многоугольниками, называются нижним основанием и верхним основанием. Остальные грани называются боковыми гранями. Все боковые грани прямой призмы являются прямоугольниками. Боковые ребра равны друг другу и вертикальны.

Многогранник, одна грань которого является n -угольником, а остальные грани – треугольники с общей вершиной, называется пирамидой, n -угольник называется основанием пирамиды, а треугольники – боковыми гранями.

Если в основании призмы лежит правильный многоугольник, а сама призма прямая, то призма называется правильной.

В зависимости от вида и содержания учебной информации, используются приемы ее уплотнения или пошагового развертывания с применением разнообразных визуальных средств. Грамотно выполненная визуальная составляющая способна помочь любой презентации быстро и эффективно донести ключевое сообщение до аудитории.

Кроме того, специфика темы «Многогранники» позволяет эффективно организовать самостоятельную исследовательскую деятельность студентов СПО. Такая деятельность не только помогает студентам само-

стоятельно добывать знания, но и совершать открытия значимые для их личностного роста. Студенты могут выполнить групповой проект с последующим изложением материала в форме презентаций. При этом студенты вырабатывают и совершенствуют навыки работы с различными источниками информации. Изложение материала занимает немного времени и позволяет сделать информацию интересной и доступной. Разнообразии многогранников позволяет рассматривать отдельные виды этих фигур; искать общие для данного вида свойства или изучать особенности конкретного многогранника; исследовать условия существования многогранника. Содержание этой темы позволяет достаточно широко в исследовании многогранников применять мысленное или реальное конструирование моделей многогранников.

Практика показывает, что планомерная пропедевтическая работа, использование систематизирующих таблиц, самостоятельная работа над проектной деятельностью и работа с презентациями позволяют повысить эффективность обучения по теме «Многогранники».

Список литературы

1. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. Геометрия, 9 класс. Учебник. М. : Просвещение, 2017.
2. Геометрия, 9 класс. Учебник / под ред. В. А. Садовниченко. М. : Просвещение, 2018.
3. Геометрия. 10-11 классы: учеб. для общеобразовательных учреждений: базовый и профил. уровни / под ред. Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов [и др.]. М. : Просвещение, 2013.
4. Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир М. С. Геометрия, 9 класс. Учебник. М. : ВЕНТАНА-ГРАФ, 2018.

Особенности проведения лекционных занятий при дистанционном обучении

Наталья Валентиновна Мойко¹,
Лилия Александровна Купряшина², Ирина Михайловна Мойко³

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
¹89875083153@yandex.ru, ²Liliya_sl@mail.ru, ³irmojko@yandex.ru

Аннотация. Рассматриваются особенности проведения лекционных занятий по математике в условиях дистанционного обучения. Исследуются недостатки видеолекций и предлагаются способы их устранения. Подробно раскрывается проблема визуализации учебной информации, в частности описаны возможности использования презентаций, электронной доски, графического планшета на лекционном занятии по математике

Ключевые слова: обучение математике, дистанционное обучение, организация лекционного занятия по математике

Features of conducting lectures in distance learning

Natal'ya V. Moyko¹, Liliya A. Kupryashina², Irina M. Moyko³

^{1,2,3}Penza State University, Penza, Russia
¹89875083153@yandex.ru, ²Liliya_sl@mail.ru, ³irmojko@yandex.ru

Abstract. The article discusses the features of conducting lectures in mathematics in the context of distance learning. The disadvantages of video lectures are investigated and ways to eliminate them are proposed. The problem of visualization of educational information is disclosed in detail, in particular, the possibilities of using presentations, an electronic board, a graphics tablet in a lecture in mathematics are described.

Keywords: teaching mathematics, distance learning, organizing a lecture in mathematics

В период пандемии мы все были поставлены в условия дистанционного образования. Мы не понимали с чего начинать. Как преподавать математику, давать новый материал, да еще и проверять знания, которые получает студент дистанционно. У всех было очень много вопросов. Каждый преподаватель выбрал свой путь подачи и проверки знаний.

Простое преобразование текстов лекций, учебников, учебных пособий в электронные аналоги, не решает проблемы, а лишь затрудняет процесс дистанционного обучения, поскольку при этом меняется лишь форма доставки учебных материалов. Формализм в дистанционном обучении обусловлен тем, что имеющиеся средства обучения подгоняются

или просто включаются в курсы дистанционного обучения без учета дидактических требований к средствам дистанционного обучения. Существуют две технологических составляющих учебного процесса в дистанционном обучении – педагогическая (педагогическая технология) и технологическая (информационно-коммуникативная). Первая обеспечивает обучение, служит для усвоения информации. Вторая – техническая (устройства хранения, переработки и передачи информации по линиям связи) и программная технология передачи информации и коммуникации (обеспечение интерактивности и поддержания диалога). К сожалению, в литературе, посвященной дистанционному обучению, широко рассматриваются не технологии обучения, а технологии интернет и современных коммуникаций. Все педагогика сводится к обсуждению вопросов технического плана: видеоконференции, видеолекции, видеоуроки, чаты и пр.

В результате, так называемые видеолекции, лекциями как таковыми не являются. Это обычные учебные видеозаписи. Использование инновационных и интерактивных методов преподавания ни в коем случае не должны негативно сказываться на роли преподавателя в процессе обучения. Необходимо, чтобы педагогические инновации отвечали общим целям образования и особенностям содержания учебных занятий, тем самым существенно повышая их результаты. В настоящее время наблюдается избыток информации у студентов, но эта информация не всегда качественная и хорошо структурированная, поэтому особую роль отводят архитектоники учебного занятия, т.е. общему эстетическому плану его построения, гармонирующему с ценностно-целевой установкой занятия и его содержанием.

Рассматривая содержание образования как транслируемую часть культуры, преследуется цель сохранения интеллектуального наследия поколений. В наше время к этой задаче добавляется еще одна не менее важная. Чтобы быть успешным в современном мире, необходимо уметь быстро находить нужную информацию, осмысливать и использовать ее. Это способность мыслить по-современному вырабатывается в процессе обучения в том числе дистанционном.

В общепринятом понимании презентация – это демонстрационные материалы для публичного выступления. В образовательном процессе – это подача учебного материала для определенной аудитории. Одним из таких средств, призванных поднять эффективность лекции на новый уровень и повысить качество обучения студентов в целом, является использование презентаций. Основной их принцип действия – это влияние на визуальное мышление студентов. Наглядность учебного материала во многом определяет мотивацию студента к его изучению. По данным ЮНЕСКО, когда человек слушает, он запоминает 15% речевой информации, когда смотрит – 25% видимой информации, когда видит и слушает – 65% получаемой информации. Презентация, сопровождающая лекцию,

позволяет систематизировать знания, дает возможность лучше писать конспект (выделять ключевые моменты, без ошибок записывать новые термины, определения, даты), помогает зрительно запоминать материал.

Важно решить, какие разделы необходимо включить, каково назначение каждого, разместить их в логическом порядке и определить порядок выступления. Мы не пытались объять необъятное. Оставляли лишь те слайды, на которых планировали подробно остановиться. На каждом слайде представляли только ту информацию, которую можно раскрыть. Необходимо помнить, что презентация для выступления не предназначена для того, чтобы полно представлять информацию. Самое главное предназначение PowerPoint обозначено в названии этой программы. В переводе с английского, power - это «сила»; point - это точка, пункт, ключевой момент, сущность. Вместе в дословном переводе это может означать «силовая точка», «опорный пункт» или «ключевой момент». Именно они нужны на слайдах презентаций, демонстрируемых во время лекции, чтобы студенты могли не только слышать и запоминать услышанное, но и иметь возможность обозревать все ключевые мысли вместе. Технология компьютерной презентации позволяет:

- создавать слайды, сопровождающие выступление и содержащие текст, графику, видео, с помощью специальных инструментов и других редакторов (текстовых, графических и т. п.) (рис.1, рис 2.);

- планировать последовательность (структуру) демонстрации, организуя дополнительные (скрытые) слайды, оперативно изменяя содержание слайдов;

- используя курсор в качестве указки, обращать внимание аудитории на различные участки представленной информации; иметь невыводимый на экран текст выступления или примеров (заметки выступающего).

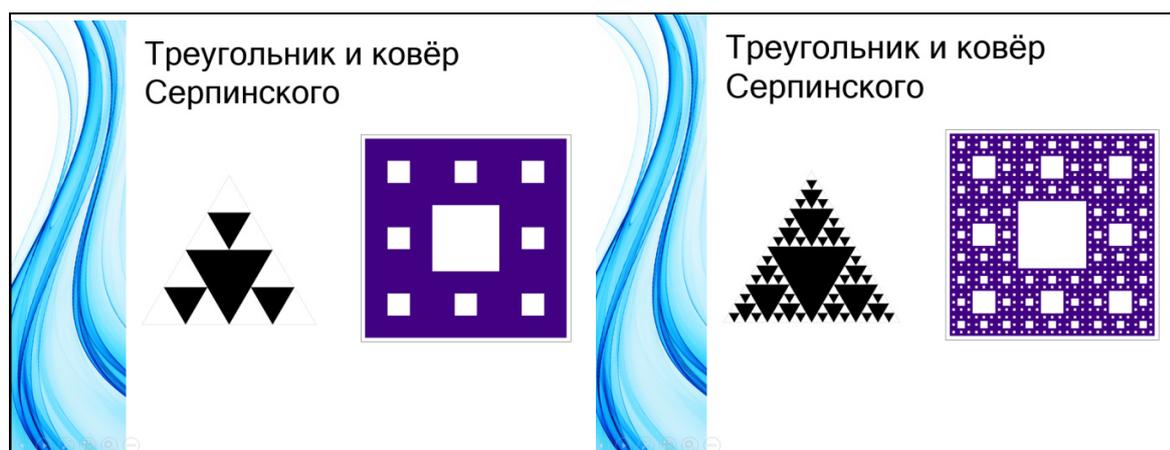


Рис. 1. Слайды, иллюстрирующие построение треугольника и ковра Серпинского (gif)

Материал презентации состоит из следующих основных частей: комплект слайдов, содержащих основные положения (в форме текста), схемы, диаграммы, рисунки (рис. 3) и структура презентации (рис. 4).

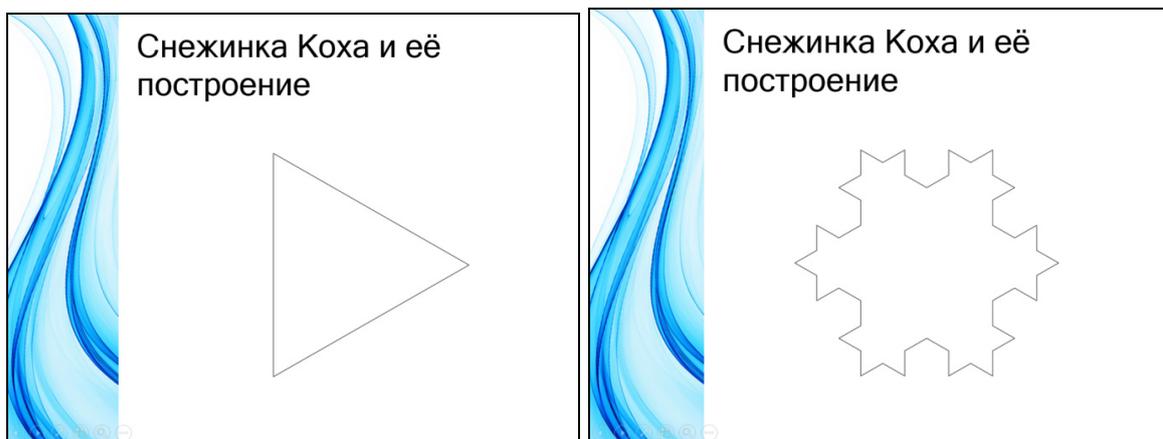


Рис. 2. Построение снежинки Коха



Рис. 3. Основные положения и рисунки, иллюстрирующие уравнение свободного движения

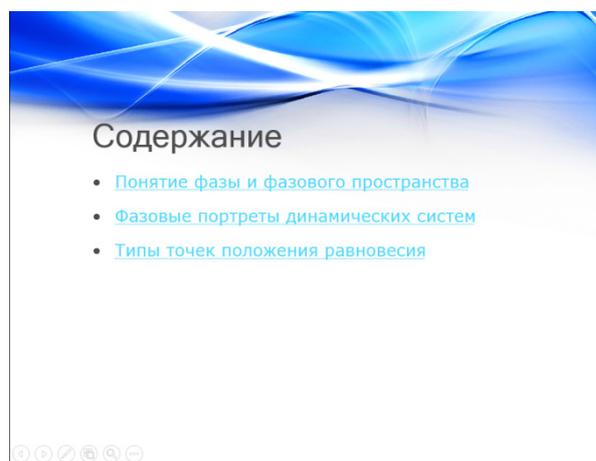


Рис. 4 Структура презентации

Хорошая презентация помогает преподавателю показывать общую логику изложения, связь частей лекции между собой, соотношение отдельных тем. Поэтому не надо бояться представлять на слайде какую-то одну идею, а для раскрытия остальных создавать новые слайды. Создание и использование презентаций позволяет преподавателю привнести эффект наглядности в лекционные занятия и помогает студенту усвоить материал быстрее и в полном объеме.

Однако нельзя переоценивать использования презентаций на лекции. В зарубежных исследованиях, содержащих большое количество эмпирических сведений, прослежена параллель повсеместного внедрения презентаций и активного использования кино и видеоаппаратуры в западной школе 1960-х гг., которое затем потеряло актуальность. В результате становится очевидным, что презентация как образовательный метод остается недостаточно изученной.

При проведении дистанционных занятий по математике приходится писать много математические выражения, поэтому недостаточно де-

монстрировать презентацию и дополнять ее пояснениями, по крайней мере, подготовка такой презентации займет много времени – надо набрать все формулы, подготовить чертежи.

Одним из основных цифровых инструментов в этом описании является программа для проведения онлайн конференций Zoom. Сегодня этот сервис широко известен работникам образования. При проведении дистанционных занятий по математике необходимо писать математические выражения, поэтому недостаточно демонстрировать презентацию и дополнять ее пояснениями, по крайней мере, подготовка такой презентации займет много времени – надо набрать все формулы, подготовить чертежи.

Для нас приемлемым вариантом оказалось использование комбинации «Zoom+онлайн доска». На платформе ZOOM можно демонстрировать видео и презентации, а также выводить необходимые таблицы и справочный материал в онлайн режиме.

Лекция ведется на расстоянии, но все студенты видят и слышат преподавателя, также могут задавать вопросы. Преподаватель может устроить опрос или вызвать студента к доске для решения, например, какой-либо задачи.

Однако существует большой минус – писать мышкой на доске не очень удобно. По-хорошему, необходимо использовать графический планшет. Со временем студенты поняли, что онлайн-лекция с преподавателем будет лучше при изучении и усвоении нового материала, нежели просто выложенный текст лекции и презентация.

Таким образом, нельзя отрицать то, что дистанционное обучение очень удобно и полезно в наше время. Однако в профессиональном образовании дистанционное обучение уступает традиционному варианту обучения. Дистанционное обучение эффективно при получении дополнительного образования или при повышении квалификации, когда у студента уже есть азы профессии из очной формы обучения.

7. ПЕРСОНАЛИИ

УДК 61 (091)

К 100-летию И. И. Этермана – видного педагога и ученого

Виталий Ильич Левин

Пензенский государственный технологический университет, Пенза, Россия
vilevin@mail.ru

Аннотация. Изложена научная биография видного советского педагога и ученого И. И. Этермана. Описаны основные этапы его биографии. Дан обзор его результатов в области математики и вычислительной техники. Освещена его педагогическая деятельность. Описаны особенности И. И. Этермана как ученого, педагога и человека.

Ключевые слова: И. И. Этерман, математика, механика, вычислительная техника, педагогика

To the 100th anniversary of I. I. Etherman – a prominent teacher and scientist

Vitaliy I. Levin

Penza State Technological University, Penza, Russia
vilevin@mail.ru

Abstract. The article presents the scientific biography of the prominent Soviet teacher and scientist I. I. Etherman. The main stages of his biography are described. An overview of his results in the field of mathematics and computer engineering is given. His pedagogical activity is highlighted. The features of I. I. Etherman as a scientist, teacher and person are described.

Keywords: I. I. Etherman, mathematics, mechanics, computer engineering, pedagogy

Моя первая встреча с Израилем Исаевичем Этерманом состоялась в Пензе, в начале сентября 1975 года, спустя несколько недель после приезда в этот город. Здесь мне предстояло возглавить кафедру математики завода-втуза при заводе ВЭМ (вычислительных электронных машин), филиала Пензенского политехнического института. И.И. Этерман позвонил мне, представился доцентом Политехнического института и предложил встретиться. Наша встреча состоялась в Центральном парке им. В.Г. Белинского, недалеко от квартиры И.И. Передо мной предстал худощавый мужчина средних лет, среднего роста, очень живой, с любо-

пытством смотревший на меня. Во время разговора он вежливо, но настойчиво расспрашивал меня. Его интересовало буквально все: происхождение, семья, профессиональная биография, планы и т.д. В свою очередь, я расспрашивал его о городе, условиях жизни в нем, о местных вузах и науке. И на все вопросы получал удивительно точные и ясные ответы. И.И. Этерман мне определенно понравился. По-видимому, и я произвел на него хорошее впечатление. В итоге, он предложил регулярно встречаться, и я с благодарностью принял это предложение. В процессе наших встреч я хорошо узнал Израиля Исаевича как ученого, педагога и человека. И хотя с тех пор прошло много лет, память об этом удивительном человеке, ученом и педагоге сохранилась у меня подробно и навсегда. Настоящая работа – лишь небольшая дань этой памяти.

Израиль Исаевич Этерман родился 1 мая 1919 года в г. Городня Черниговской области (Украина). В начале 1920-х годов его семья переехала в Москву. Здесь в 1926 году он пошел в школу. Ему повезло: в 1920-е – 1930-е годы он жил со своей семьей в самом центре Москвы, на Арбате. Там же жило много знаменитых и высокопоставленных людей. С некоторыми из них общительный мальчик в 1920-е – 1930-е годы познакомился и стал бывать в гостях. По его словам, больше всего он любил общаться с писателем графом Алексеем Николаевичем Толстым и наркомом просвещения СССР Анатолием Васильевичем Луначарским. Конечно, общение с такими людьми сильно способствовало его раннему и быстрому созреванию. В 1936 году И.И. Этерман поступил на механико-математический факультет Московского государственного университета. И здесь ему снова повезло: МГУ был тогда университетом очень высокого уровня на факультете преподавало немало корифеев математической науки, пришедших в университет еще до революции. В том числе, Николай Николаевич Лузин, читавший матанализ; Александр Яковлевич Хинчин, читавший матанализ, теорию чисел, теорию вероятностей; Павел Сергеевич Александров, читавший топологию. Общение с людьми такого высокого профессионального уровня сыграло большую роль в формировании И.И. Этермана как математика и вообще ученого. Особенно сильное влияние на него оказал, по-видимому, Н.Н. Лузин. Этерман с восторгом вспоминал впоследствии лекции Лузина по матанализу, которые, по его словам, носили характер театра одного актера и собирали огромную аудиторию – буквально, яблоку было негде упасть. Люди сидели на подоконниках, ступенях, стояли в проходах; среди них были не только математики, но и физики, химики, историки, филологи и т.д. Они приходили посмотреть, послушать, пообщаться, завести новые знакомства. Однако этот период состоял не из одних только радостей. И.И. Этерману пришлось стать свидетелем начавшихся тогда гонений на ученых: на его глазах прошли, в частности, дело академика Н.Н. Лузина (1936г.) и дело академика Н.И. Вавилова (1940 г.). О последних он рас-

сказывал спустя много лет. Он окончил университет в 1941 году, в день начала войны, и поступил на работу в Центральный аэрогидродинамический институт (ЦАГИ). Там в течение ряда лет он занимался оборонной тематикой. В связи с этой работой он обладал бронью и не призывался в армию. В 1944 году И.И. Этерман защитил диссертацию по тематике своей работы на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Увы, эта степень оказалась у него единственной – получить докторскую степень ему так никогда и не удалось. После Великой Отечественной войны он работал в различных вузах Москвы.

В 1952 году в жизни Израиля Исаевича произошел крутой поворот: в связи с невозможностью продолжения работы в Москве из-за пресловутой борьбы с «безродными космополитами» он переехал в Пензу, где получил должность доцента кафедры высшей математики Пензенского индустриального (впоследствии политехнического) института. В 1956 году И.И. Этерман был избран заведующим кафедрой высшей математики Пензенского индустриального института. В этой должности он пробыл до 1974 года. За это время он сумел внести много нового в жизнь кафедры. Появился студенческий математический кружок, началась систематическая деятельность по повышению квалификации преподавателей, активизировалась работа по подготовке и публикаций научных статей, начали издаваться научные книги. Также он внес большой личный вклад в научно-педагогическую жизнь кафедры, работая в области прикладной математики, механики, вычислительной техники. Его работы по механике были посвящены газовой динамике и носили закрытый характер. Работы по математике относились к теории аппроксимации (в частности, был предложен новый класс аппроксимирующих полиномов – полиномы Этермана. Работы по вычислительной технике были связаны с теорией аналоговых машин. Работы И.И. Этермана по вычислительной технике собраны в монографии [1], а работы по математике – в монографии [2]. Первая была переведена на английский язык и издана в Англии, Германии и США. Она явилась одной из первых в мире книг по аналоговой вычислительной технике. Вторая книга долго использовалась в качестве учебного пособия студентами специальности «прикладная математика». В 1962 году И.И. Этерман подготовил докторскую диссертацию по математике «Решение некоторых задач прикладного анализа с помощью специальных приближенных многочленов» [3]. Защита состоялась в том же году в Казани (КГУ) и прошла успешно. Однако в ВАКе диссертацию провалили. Спустя пять лет Этерман подготовил обновленную версию своей диссертации и под названием «Свойства и приложения специальных приближенных полиномов» представил в Москве в МГПИ [4]. Защита, как и в первый раз, прошла успешно. Однако ВАК, как и в первый раз, диссертацию прова-

лил. После этого Этерман больше никогда не пробовал выходить на защиту докторской диссертации. Он даже отказывался говорить об этом.

После неудачи с защитой докторской диссертации И.И. Этерман существенно уменьшил интенсивность научной работы. Он лишь собрал результаты своих математических исследований, связанных с докторской диссертацией, и в 1973 году опубликовал в виде монографии [2]. В этот период его интересы стали все больше перемещаться в сторону педагогики. Институт, где он работал, стал набирать силу. Он получил новое название – Пензенский политехнический институт. В него зачастили комиссии из Министерства высшего образования, которые фиксировали, что институт находится «на подъеме». В этих условиях роль И.И. Этермана как отличного, опытного педагога и руководителя была очень велика. В ректорате института это знали и обязательно водили приезжих на лекции Этермана, которые, по отзывам слушавших, были великолепны и напоминали «театр одного актера». Тем не менее, в 1974 году, в связи с истечением срока полномочий, его служба в качестве заведующего кафедрой математики закончилась, и он перешел на должность доцента этой кафедры. С этого времени его интересы до конца его пребывания в Пензенском политехническом институте лежали исключительно в области педагогики.

Ученых можно делить на первопроходцев, воплощений и просветителей. По этой классификации И.И. Этерман принадлежал к просветителям, ибо больше всего он преуспел в систематизации и продвижении результатов других ученых, благодаря чему они делались доступными для всех. Он был безусловно теоретиком, а не экспериментатором. То есть, подлежащий изучению объект он всегда исследовал на его математической модели. Известно, что математическая модель изучаемого объекта должна быть существенно проще самого объекта, если мы хотим, чтобы изучение объекта было эффективным. Однако ничего существенного в модели объекта нельзя устранять в процессе ее упрощения, иначе модель может стать неадекватной объекту. В случае И.И. достичь существенного упрощения математической модели объекта, не теряя при этом существенные черты этого объекта, ему помогали его разнообразные знания – математические (Мехмат МГУ) и инженерные (опыт работы в ЦАГИ). Необходимо отметить, что И.И. знал много разделов современной математики, весьма умело использовал их при решении различных прикладных задач. При этом он подходил к решению этих, как и чисто математических, задач, абсолютно профессионально, т.е. не умел работать плохо, а только хорошо или никак. Приступая к очередной работе, он обязательно знакомился с литературой по теме работы – отечественной и зарубежной. В этом ему помогало знание английского и немецкого языков и умение разбирать тексты на некоторых других языках. У него была большая собственная библиотека, насчитывавшая око-

ло двух тысяч томов. Значительная часть книг имели отношение к работе И.И. и регулярно использовались им. Но огромное количество книг никак не были связаны с его работой, а содержали разнообразные сведения из всех областей человеческой деятельности, которыми он всю жизнь усердно овладевал: физика, химия, биология, медицина и т.д. В этом разнообразии знаний был весь И.И. Этерман – один из последних энциклопедически образованных ученых России. Не случайно в его библиотеке были представлены и разнообразные энциклопедии, в частности, 16-томная Еврейская энциклопедия Брокгауза и Эфрона. У него было еще одно свойство, достаточно редко встречающееся у ученых – очень тонкая математическая интуиция. Она позволяла ему в некоторых случаях заранее, еще до получения научного результата, предсказывать его примерную форму. Она же давала ему возможность формулировать в некоторых случаях новые постановки задач с ожидаемыми новыми результатами, исходя из известных аналогичных постановок с соответствующими известными результатами в других областях.

И.И. Этерман был превосходным педагогом. Лекции по математике, которые в течение почти сорока лет он читал студентам и аспирантам, были совершенны как по содержанию, так и по форме. Язык этих лекций был точен и потому слушатели хорошо понимали, что именно хотел сказать лектор. Причем он обычно исходил из содержания рассматриваемой темы и лишь затем вводил формальный математический аппарат. Благодаря этому формулы не заслоняли от слушателей суть дела, а напротив проясняли ее. Важной частью педагогической деятельности И.И. Этермана была руководство научной работой аспирантов и соискателей. Эта деятельность, наряду с научной, составляла важнейшую часть его жизни. Он отдавал ей большую часть своего времени, сил и души. В качестве научного руководителя И.И. действовал весьма нестандартно. Он не предоставлял своим ученикам точные постановки математических задач, которые они должны были решить, не указывал готовый математический аппарат, который должен был привести к решению. Вместо этого он красочно (если возможно – с историческими пояснениями) рассказывал содержательную постановку задачи, а в конце беседы с воодушевлением сообщал, какое огромное теоретическое и практическое значение имело бы решение данной задачи. После этого ученик обычно «заводился», так что И.И. Этерману оставалось лишь время от времени контролировать ученика, подсказывать ему необходимую информацию и корректировать его шаги, если они шли явно «не туда». Неудивительно, что молодежь тянулась к нему, и у него всегда было много учеников. И.И. не только профессионально и ненавязчиво обучал их проведению научных исследований, но и помогал в подготовке и защите диссертации. Помимо этого, он оказывал большое положительное влия-

ние на учеников своей личностью, воспитывал, поддерживал морально, подсказывал правильные ходы и т.д.

Кроме научно-педагогической деятельности, И.И. Этерман много лет занимался просветительской деятельностью, руководя кружками любителей математики из числа студентов младших курсов и старших школьников. Из его кружковцев впоследствии выросло немало научных работников-специалистов в области чистой и прикладной математики. Во всей этой деятельности ярко проявилась способность И.И. увлечь молодежь наукой.

Говоря об И.И. Этермане как человеке, необходимо, в первую очередь, отметить, что он был настоящим профессионалом, т.е. человеком, который не умеет работать плохо – только хорошо или никак! Стержень, на котором держались все направления его деятельности, была безукоризненная логика мышления, которая позволяла ему рассматривать разнообразные проблемы, в том числе, далекие от сферы его профессиональных интересов, и находить везде убедительные решения. Он также живо интересовался многими сторонами жизни, далекими от интеллектуальной деятельности: искусством, литературой, театром, политикой, женщинами. Очень любил он свободное общение, не ограничиваемое тематическими рамками. На все у него был свой, особенный взгляд. Эти взгляды он охотно высказывал в убедительной, но в то же время ненавязчивой форме. Он обладал превосходным чувством юмора (который иногда был достаточно резким по форме).

Израиль Исаевич Этерман оставил после себя серьезное научно-педагогическое наследие. Это, прежде всего, основополагающие труды по вычислительной математике. Далее, это серьезные работы по аналоговой вычислительной технике – одни из первых в этой области в мире. Его книги в этих областях [1],[2], отлично написанные, продолжительное время использовались в научных и учебных целях. Лекции И.И. Этермана по матанализу и другим математическим дисциплинам, читанные в 1950-е – 1980-е годы студентам, были образцом педагогического мастерства. Они немало способствовали росту квалификации молодых преподавателей вуза. А энциклопедический характер его знаний вызывали к нему большой интерес множества людей разных возрастов, разных профессий и разных наклонностей. В мае 2019 года наступило 100-летие со дня рождения И.И. Этермана. Однако нигде в России не было проведено никаких мероприятий, посвященных памяти этого замечательного педагога и ученого. Настоящая статья является скромной попыткой напомнить о нем Российской научной и педагогической обществу.

Список литературы

1. Этерман И. И. Математические машины непрерывного действия. М. : Машгиз, 1954.

2. Этерман И. И. Аппроксимативные методы в прикладной математике. Пенза : Пенз. политехн. ин-т, 1973.

3. Этерман И. И. Решение некоторых задач прикладного анализа с помощью специальных приближенных многочленов : диссертация д-ра физ-мат. наук. Казань : Казанский гос. университет, 1962.

4. Этерман И. И. Свойства и применения специальных приближенных полиномов : диссертация д-ра физ-мат. наук. М. : Московский гос. педагогический университет, 1967.

8. ДИСКУССИОННЫЕ РАБОТЫ

УДК 514.112.3, 514.112.6

Об успешном развитии идеи геометрического построения Архимеда в задаче трисекции угла

Сергей Леонидович Михайлов

пенсионер, Заречный, Пензенская область, Россия
smthrsol@internet.ru

Аннотация. Посредством второй окружности того же радиуса и определенным образом расположенной создается успешное решение задачи трисекции произвольного угла в строгом соответствии с условиями этой известной с древности неразрешимой задачи. Представлены геометрические: построение, доказательство и четыре успешных примера – иллюстрации.

Ключевые слова: геометрия, задача трисекции угла, построение Архимеда, решение задачи трисекции, доказательство решения, успешные примеры

The successful development idea the Arkhimed,s geometrically desaster in to three-section division angle task

Sergey L. Mikhailov

retiree, Zarechny, Penza region, Russia
smthrsol@internet.ru

Abstract. Ancient celebration task - the tree-section division angle task by circul and ruler without marks only - is the un-solution task. But in to individual case or definite permissible - this task have a successful solution. Now author use the Archimedes idea which successful by rules with marks only. By introduction second the same circle - and permissible is now not compulsory for solution this task for angles, which may be in to any triangle. In this paper consider geometrically: disaster, proof, and four successful example this tree-section division angle task now.

Keywords: geometry, three-section division angle task, Archimedes geometrician disaster, solution of the three-section division angle task, proof disaster task, successful examples

Введение

Знаменитая издревле задача трисекции – разделение произвольного угла на три равные части исключительно циркулем и линейкой без делений - традиционно относится к числу неразрешимых задач. Но в некоторых частных случаях или с определенными допущениями она все же успешно разрешима. Автор обратил внимание на идею, приписывае-

мую знаменитому Архимеду, которая также успешна при использовании линейки с делениями. Вместо этого здесь вводится в построение вторая окружность, устраняющая такое допущение - и задача древности становится успешно разрешимой в интервале углов, присущих произвольному треугольнику. В общем случае любой угол можно представить суммой таких углов. Обзорный материал по данной проблеме легко можно найти в Интернете, набрав в поисковике термин "Трисекция". В данном кратком сообщении приводится подробное описание успешного построения, строгое математическое геометрическое доказательство и 4 успешных практических примера - иллюстрации.

Допустим, что нам дан произвольный угол $\angle BAC = \alpha$ (рис. 1). Построим окружность произвольного радиуса R с центром в A - далее квантор $((R-A))$, и продолжим луч CA за вершину угла A на расстояние не менее чем $2R$ - прямая CG , а луч BA на расстояние не менее R - точка F на $((R-A))$. Пусть $E = ((R-A)) \cap CG$ и построим окружность того же радиуса R с центром в точке $E - ((R-A))$. Соединим точки B и E - прямая BE и получим точку $D = ((R-E)) \cap BE$. Соединим прямой DT точку D с A и аналогично - с C - отрезки DA, DC', DC соответственно.

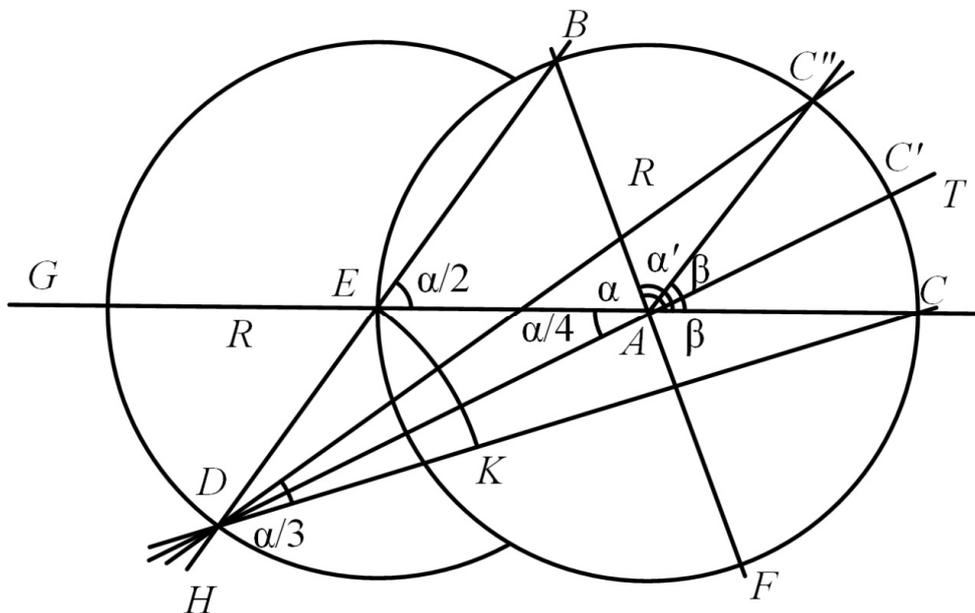


Рис. 1. Предлагаемое автором геометрическое построение

Рассмотрим треугольники $\triangle ABE, \triangle ADE$. Они равнобедренные, так как их боковые стороны равны $AB = AE = ED = R$ по построению. Заметим, что углы $\angle BAC, \angle EAF$ вертикальные, центральные и потому и дуги, на которые они опираются - равны: $\cup BC = \cup EF = \alpha$. Углы

$\angle FBE, \angle BEC$ - вписанные и также опирающиеся на эти же дуги, тоже равны и составляют половину от соответствующих центральных углов $\angle FBE = \angle BEC = \frac{\alpha}{2} = \angle ABE = \angle BEA$. Для треугольника $\triangle ADE$ угол $\angle BEA$ - внешний и потому равен сумме двух равных углов при основании $\frac{\alpha}{2} = \angle BEA = \angle EAD + \angle EDA, \Rightarrow \angle EDA = \frac{\alpha}{4}$.

Рассмотрим теперь треугольник $\triangle ABD$, для которого угол $\angle BAC'$ является внешним и потому равен сумме двух несмежных с ним углов $\angle BAC' = \angle ABE + \angle EDA = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{4} = \frac{3\alpha}{4}$. А это означает, что мы подтвердили реальность построения Архимеда, правда для угла $\frac{3\alpha}{4}$ пока. По сути вторая окружность обеспечивает нам решение ранее неразрешимой проблемы – отрезка $ED = R$ – рис. 2. (рис. 32. [1]).

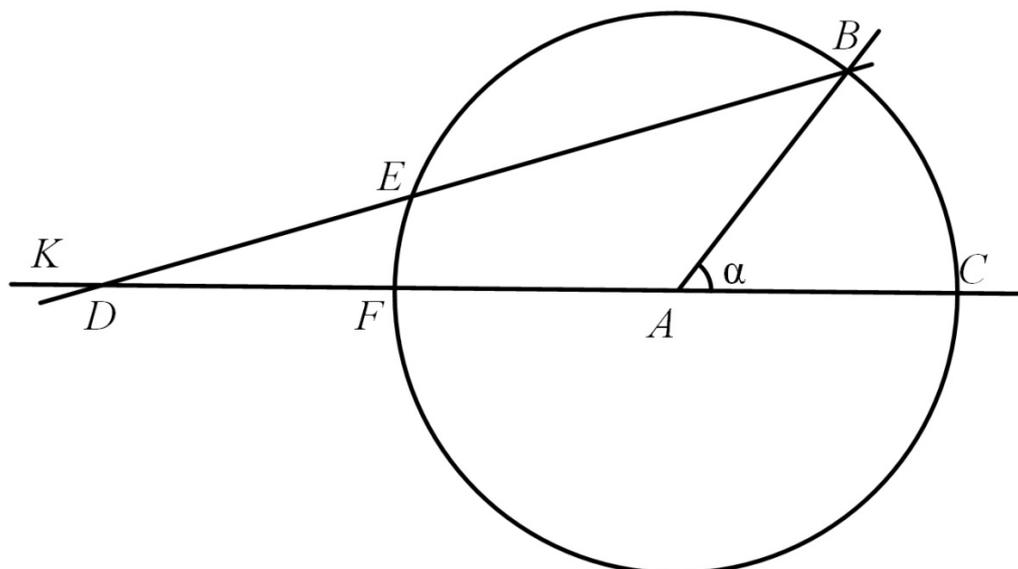


Рис. 2. Построение, приписываемое Архимеду

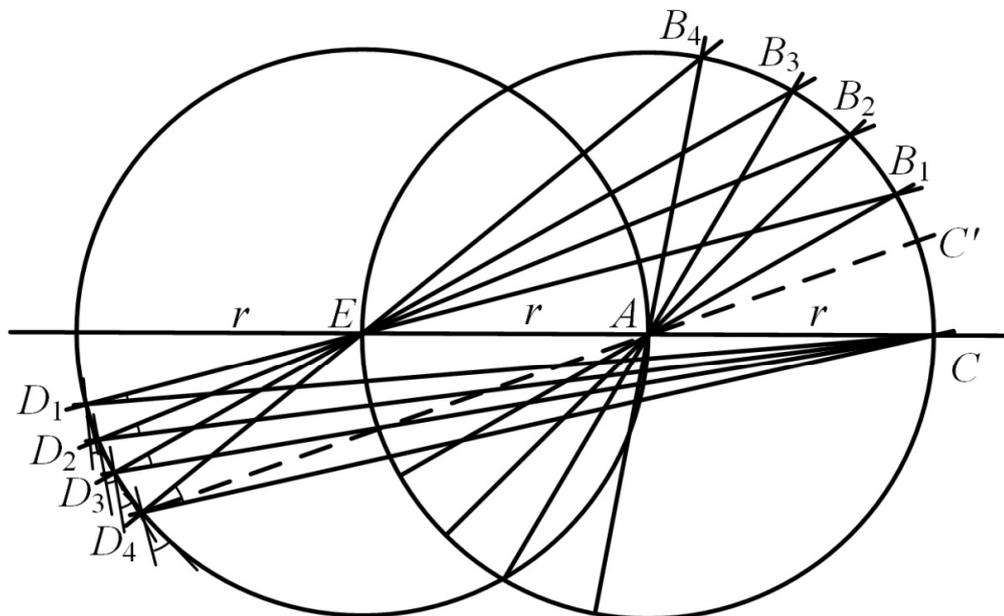
В роли «засечки на прямой» BH нами была использована окружность $((R - E))$. Именно поэтому – отныне отпадает необходимость в наличии делений на линейке, так как вторая окружность всегда поставит нам такую «засечку» автоматически.

Возвращаясь к исходному углу α , построим циркулем на дуге $\cup BC$ дугу $\cup C'C''$, равную дуге $\cup CC'$. Соответствующие центральные углы также будут равны $\angle CAC' = \angle C'AC'' = \beta = \frac{\alpha}{4}$. На эти же дуги также опираются и два равных угла $\angle CDC' = \angle C'DC''$. Но угол $\angle C'DC''$ является частью ранее разделенного на три угла $\angle BDC'$, т.е. он также со-

ставляет третью часть от своего центрального угла, а именно $\frac{\beta}{3}$ (свойства неотъемлемой части - также неотъемлемы, т.е. – те же). Аналогично и для угла $\angle CDC' = \frac{\beta}{3}$ и соответствующий ему центральный угол будет втрое больше. Поэтому, добавляя угол $\angle CAC'$ к углу $\angle BAC'$ получим исходный угол $\alpha = \angle BAC' + \angle CAC' = \frac{3\alpha}{4} + \frac{\alpha}{4} = \alpha$ и соответственно $\angle BDC = \angle BDC' + \angle CDC' = \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{3} = \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{12} = \frac{(3+1)\alpha}{12} = \frac{4\alpha}{12} = \frac{\alpha}{3}$, что и требовалось доказать: $\angle BDC = \frac{\angle BAC}{3} = \frac{\alpha}{3}$.

Сравнение рис. 1 с рис. 2 показывает их существенное различие, притом не только геометрическое – в построении, но и логически - существенное. Идея Архимеда, в ее неизменном виде, так бы и оставалась нерезультативной, но ее принципиальное изменение и развитие, предлагаемое автором здесь, приводит нас к долгожданному результату.

Практическое применение не требует построения окружностей полностью – для первой – достаточно верхней полуокружности, а для второй – нижней и в целом – проводится минимальными действиями легко и быстро.



$$\begin{aligned} \angle B_i A C &= 30^\circ; 45^\circ; 60^\circ; 81^\circ & \angle B_i D_i C &= 10^\circ; 15^\circ; 20^\circ; 27^\circ \\ \angle B_4 D_4 C' &= 20,25^\circ \end{aligned}$$

Рис. 3. Успешные примеры применения предлагаемого построения

На рис. 3 показано реальное применение нашего способа для углов 30° , 45° , 60° и 81° градус – получены углы 10° , 15° , 20° и 27° градусов, причем – вопреки считавшемуся до сих пор невозможному разделению угла в 60° на три равные части. Углы, превосходящие 180° , предварительно разделяются на меньшие 180° и также могут быть разделены, а результаты делений – успешно суммированы.

Работа выполнялась автором по собственной инициативе.

В заключение автор сообщает, что юридический приоритет на вышеизложенное им был оформлен заранее.

Список литературы

1. Выгодский М. Я. Справочник по элементарной математике. М. : Наука, 1974. 416 с.

Замечание редактора

Известно [з.1], что задача о трисекции угла α разрешима тогда и только тогда, когда уравнение

$$x^3 - 3x - 2\cos\alpha = 0$$

разрешимо в квадратных радикалах.

Известно большое число работ ([з.2], [з.3]), посвященных решению задачи о трисекции угла с помощью дополнительных средств. Например, решение с помощью невисса предложенное Архимедом. Работа С. Л. Михайлова относится к этому направлению.

[з.1] M. L. Wantzel. Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 1837, vol.1, issue 2, pp. 366–372.

[з.2] История математики / Под ред. А. П. Юшкевича. – М.: Наука, 1970. – Т. 1.

[з.3] Прасолов В. В. Три классические задачи на построение. – М.: Наука, 1992. – Т. 62. – 80 с.

СОДЕРЖАНИЕ

1. УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

<i>Скворцов О. С., Кондырев О. В., Снегур М. О.</i> Расчет комплексных ТЕ-поляризованных волн метаматериального слоя	3
<i>Макеева Г. С.</i> Математические модели нелинейных микроволновых и оптоэлектронных устройств, функционирующих на основе включений с высокой степенью нелинейности	8
<i>Ванчуров Д. А., Снегур М. О.</i> Метод операторных пучков и оператор-функций в задаче о нормальных волнах закрытого регулярного неоднородного диэлектрического волновода произвольного сечения	20
<i>Тихов С. В.</i> Исследование задачи на собственные значения, возникающей в теории распространения нелинейных многочастотных волн	27
<i>Макеева Г. С.</i> Математическое моделирование нелинейных параметрических процессов в устройствах терагерцового диапазона на основе графеновых метаматериалов	33
<i>Снегур М. О.</i> Сравнение волновых спектров открытого и закрытого неоднородных волноводов	48
<i>Сизиков В. С., Лавров А. В.</i> Разделение перекрывающихся спектральных линий путем дифференцирования и минимизации функционала невязки	56
<i>Лерер А. М., Макеева Г. С., Черепанов В. В.</i> Математическое моделирование нелинейных явлений в графеновых метаповерхностях в терагерцовом и инфракрасном диапазонах частот	65
<i>Судаков М. Н., Снегур М. О.</i> Аналитическое исследование спектра комплексных волн плоского волновода	75
<i>Петрова Ю. А.</i> Аналитическое исследование задачи об электромагнитных колебаниях открытых неоднородных резонаторов	81
<i>Бойков И. В., Степанов Н. С.</i> Непрерывный операторный метод решения обратных задач теории рассеяния на телах с кусочно-гладкими границами	86

2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

- Мельникова А. М., Тында А. Н., Грозная Е. В.* Методы аппроксимации интегралов на полуоси и их применение к интегральным уравнениям 93
- Хубежты Ш. С., Нарतिकоев Н. Б.* Квадратурные формулы, содержащие наперед заданные узлы с весовой функцией $p(x) = \sqrt{1-x^2}$ 98
- Алексеев И. Ю., Кудряшова Н. Ю.* Разностные схемы для нестационарных уравнений математической физики 103
- Пухов А. А., Тында А. Н., Мойко Н. В.* Численное исследование одной дробной реологической модели вязкоупругого тела на основе схемы типа «предиктор-корректор» 108
- Фролов Е. С., Бойков И. В.* Приближенные методы решения нелинейных интегральных уравнений Вольтерра с переменной задержкой 113
- Васильев Н. А.* Приближенное решение уравнения Прандтля методом сплайн-коллокации нулевого порядка 118
- Трошин С. В., Кудряшова Н. Ю., Алексеев И. Ю.* Численные методы решения стационарных дифференциальных уравнений в частных производных 123
- Сурикова А. В., Тында А. Н.* Асимптотические методы интегрирования быстроосциллирующих функций 130
- Новоженова А. Г., Кудряшова Н. Ю.* Разностные методы решения задач термоупругости 136
- Чекунов А. А.* Об одном приближенном методе решения гиперсингулярных интегральных уравнений второго рода с особенностью третьего порядка 142

3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ, ЭКОЛОГИИ, БИОЛОГИИ, ИММУНОЛОГИИ

- Меркушина Е. С.* Исследование уравнений реакции-диффузии в экологии, иммунологии и эпидемиологии 153
- Мамедова Т. Ф., Ювкина А. Д.* Оптимизации уровня потребления экономического предприятия 159

4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ФИЗИКЕ И ТЕХНОЛОГИЯХ

<i>Захарова Ю. Ф., Козинова А. А.</i> Анализ информативных признаков цели с использованием адаптивных порогов	165
<i>Демидчик И. П., Макарычев П. П.</i> Постановка и решение двухкритериальной задачи о назначении целей	171
<i>Мысякин И. С.</i> Математическая модель размещения средств защиты информации облачной системы	176
<i>Захарова Ю. Ф., Кочнева А. А.</i> Вопросы защиты информации при использовании технологий виртуализации.....	183
<i>Купцов А. Н., Печаткин К. В.</i> Математическая модель, алгоритм и программа расчета параметров движения контура пожара на территории хранения взрывоопасных объектов	187
<i>Захарова Ю. Ф., Макарова С. Е.</i> Особенности криптографических алгоритмов, основанных на многомерных квадратичных системах.....	193

5. НЕЙРОМАТЕМАТИКА И НЕЙРОКОМПЬЮТЕРЫ

<i>Устимов В. О., Черушева Т. В.</i> Применение нейронных сетей к распознаванию негативного текста в социальных сетях	198
<i>Стенькин Д. А., Горбаченко В. И.</i> Решение обратных краевых задач, описывающих процессы в кусочно-однородной среде, на сетях радиальных базисных функций методом Левенберга – Марквардта	203

6. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБРАЗОВАНИИ

<i>Варлашина С. Ю., Наземнова Н. В.</i> Интенциональные методы распознавания образов в математическом анализе	211
<i>Мойко Н. В., Зверовщикова Н. В.</i> Специфика преподавания стереометрии в условиях реализации среднего профессионального образования	217
<i>Бельдягина Е. Ю., Купряшина Л. А.</i> Особенности изучения многогранников обучающимися по программе среднего профессионального образования	223

Мойко Н. В., Купряшина Л. А., Мойко И. М. Особенности проведения лекционных занятий при дистанционном обучении 228

7. ПЕРСОНАЛИИ

Левин В. И. К 100-летию И. И. Этермана – видного педагога и ученого 233

8. ДИСКУССИОННЫЕ РАБОТЫ

Михайлов С. Л. Об успешном развитии идеи геометрического построения Архимеда в задаче трисекции угла 240

Научное издание

Математическое и компьютерное моделирование
естественно-научных и социальных проблем

Материалы

*XV Международной научно-технической конференции
молодых специалистов, аспирантов и студентов
Россия, г. Пенза, 1–4 июня 2021 г.*

П о д р е д а к ц и е й
доктора физико-математических наук,
профессора И. В. Бойкова

Mathematical and Computer Modelling of Natural Science
and Social Problems (MCM-2021)

*Proceedings of the Fifteenth International
Conference MCM-2021*

Penza, Russian Federation, 1–4 June, 2021

E d i t e d b y
Илья В. Бойков

Все материалы представлены в авторской редакции

*Корректор Е. В. Шмелева
Компьютерная верстка Д. В. Тарасова
Дизайн обложки А. А. Стаценко*

Подписано в печать 22.07.2021. Формат 60×84¹/₁₆.
Усл. печ. л. 14,53.
Заказ № 336. Тираж 100.

Пенза, Красная, 40, Издательство ПГУ
Тел./факс: (8412) 56-47-33; e-mail: iic@pnzgu.ru

Вниманию авторов!

Издательство ПГУ выпускает учебную, научную и художественную литературу, презентационную и акцидентную продукцию, а также полноцветные юбилейные и мемориальные издания в соответствии с ГОСТ 7.60–2003.

Издательство ПГУ принимает к изданию рукописи, подготовленные с использованием текстового редактора Microsoft Word for Windows версий **2003 и выше**. Формат – А4, основной шрифт – Times New Roman, 14–16 pt через одинарный интервал (минимальный размер шрифта в таблицах и сносках – 12,5 pt). Тип файла в электронном виде – doc, docx.

Работа должна содержать индекс УДК, аннотацию.

Аннотация (ГОСТ 7.86–2003, ГОСТ 7.9–1995) включает характеристику основной темы, проблемы объекта, цели работы и ее результаты. В аннотации указывают, что нового несет в себе данный документ в сравнении с другими, родственными по тематике и целевому назначению. Аннотация может включать сведения о достоинствах произведения. Текст аннотации начинают фразой, в которой сформулирована главная тема документа. Заканчивается аннотация читательским адресом.

Рисунки и таблицы должны быть размещены в тексте после ссылки на них (растровые рисунки предоставляются в виде отдельных файлов в формате jpg, BMP с разрешением 300 dpi, векторные рисунки в формате Corel Draw с минимальной толщиной линии 0,75 pt. Рисунки должны быть доступны для правки!). Рисунки должны сопровождаться подрисовочными подписями, на все рисунки и таблицы в тексте должны быть ссылки.

Формулы в тексте выполняются только в редакторе формул **MathType версия 5.0** и выше. Символы греческого и русского алфавита должны быть набраны прямо, нежирно; латинского – курсивом, нежирно; обозначения векторов и матриц – прямо, жирно; цифры – прямо, нежирно. Наименования химических элементов набираются прямо, нежирно. Эти же требования необходимо соблюдать и в рисунках.

В списке литературы **нумерация источников** должна соответствовать очередности ссылок на них в тексте ([1], [2], ...). Номер источника указывается в квадратных скобках. Требования к оформлению списка литературы на русские и иностранные источники (ГОСТ Р 7.0.5–2008): для книг – фамилия и инициалы автора, название, город, издательство, год издания, том, количество страниц; для журнальных статей, сборников трудов – фамилия и инициалы автора, название статьи, полное название журнала или сборника, серия, год, том, номер, страницы; для материалов конференций – фамилия и инициалы автора, название статьи, название конференции, город, издательство, год, страницы.

К материалам **должна** прилагаться следующая информация: фамилия, имя, отчество, контактные телефоны.

Контакты Издательства ПГУ: т.: (8412) 66-60-49, 66-67-77, e-mail: iic@pnzgu.ru

